

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CAMADA LIMITE PARA FLUIDOS
NÃO-NEWTONIANOS SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

Dissertação submetida à Universidade Federal
de Santa Catarina para a obtenção do Grau de
Mestre em Engenharia.

NELSON STENGER

Florianópolis, 22 abril de 1981.

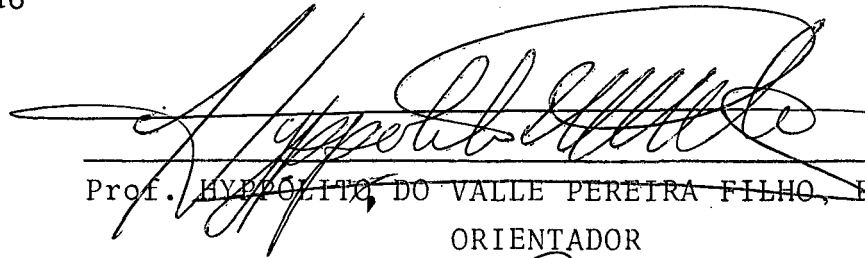
CAMADA LIMITE PARA FLUIDOS
NÃO-NEWTONIANOS SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

NELSON STENGER

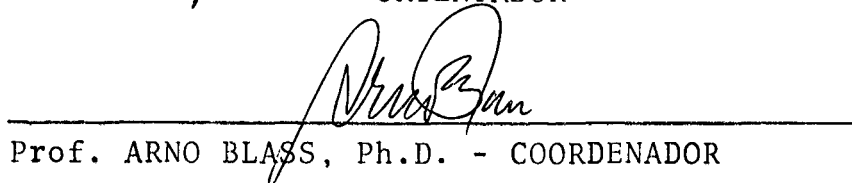
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do
Título de

"MESTRE EM ENGENHARIA"

especialidade: Engenharia Mecânica, área: Termotécnica,
e aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Gra
duação

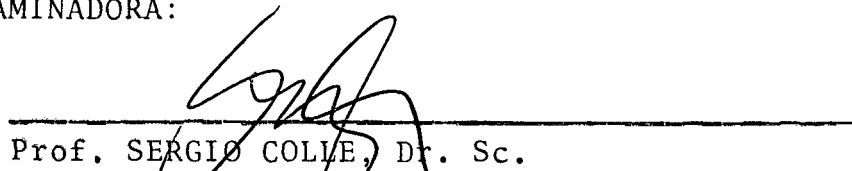


Prof. ~~HYPPOLITO~~ DO VALLE PEREIRA FILHO, Bh.D.
ORIENTADOR




Prof. ARNO BLASS, Ph.D. - COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:



Prof. SERGIO COLLE, Dr. Sc.



Prof. PAULO CESAR PHILIPPI, Dr. Ing.

A meus
pais,
irmãos e à Nora

AGRADECIMENTOS

- A CNEN e CAPES pelo suporte financeiro;
 - A UFSC pelo seu corpo docente a nossa disposição;
 - Ao orientador Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, pela dedicação com que conduziu os nossos estudos;
 - A minha família pelo incentivo recebido;
- e a todos os que direta ou indiretamente concorreram para o perfeito êxito deste trabalho os meus sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

SIMBOLOGIA	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
1. INTRODUÇÃO	1
2. TEORIA	4
2.1 - Generalidades	4
2.1.1 - Classificação dos fluidos	8
2.2 - Estudo do Modelo	13
2.3 - Apresentação do Problema	15
2.3.1 - Equações gerais	15
2.3.2 - Equações da camada limite	17
2.3.3 - Condições de contorno	20
3. TRATAMENTO NUMÉRICO	22
3.1 - Adimensionalização	22
3.2 - Discretização	25
3.3 - Procedimento Computacional	30
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS	33
4.1 = Resultados Obtidos	33
4.1.1 - Diagramas de velocidade	33
4.1.2 = Análise do coeficiente de arraste	37

4.1.3 - Análise das espessuras da camada limite..	45
4.2 - Análise Final	54
4.2.1 - Dados iniciais	54
4.2.2 - Conclusões	57
BIBLIOGRAFIA	59
APÊNDICE 1 : OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS	62
APÊNDICE 2 : ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	69
2.1 - Equação da Continuidade	69
2.2 - Equação do Movimento	70
APÊNDICE 3 : DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	72
3.1 - Equação da Continuidade	72
3.2 - Equação do Movimento	74

SIMBOLOGIA

A_j, B_j, C_j, D_j	- coeficientes da equação diferencial linearizada
B_K	- razão da progressão geométrica para o crescimento dos intervalos na direção y
C_f	- coeficiente de fricção
\underline{D}	- tensor velocidade de deformação
f	- função curvatura $\frac{R(x)}{R(x) + y}$
G_j, g_j	- coeficientes da função solução da matrix tri-diagonal
K	- índice de consistência do fluido, $N \text{ seg}^n \text{ m}^{-2}$
k	- define a relação $\frac{u}{U(x)}$, na interface
n	- índice de comportamento do escoamento, adimensional
N	- constante de valor $\frac{1}{n+1}$
\underline{P}	- tensor das tensões
\underline{P}'	- tensor das tensões viscosas
P''	- pressão termodinâmica
Re_∞	- número de Reynolds baseado no diâmetro $\frac{U_\infty^{2-n} R^n}{v_w}$
$Re(x)$	- número de Reynolds em x $\frac{U(x)^{2-n} x^n}{v_w}$
u	- velocidade tangencial
u_δ	- velocidade para $\frac{u}{U(x)} = 0.99$
U_∞	- velocidade do escoamento potencial não perturbado.

$U(x)$	- velocidade do escoamento potencial
v	- velocidade normal
V	- velocidade definida pela equação (3.6)
x	- coordenada na direção do escoamento
y	- coordenada normal ao escoamento
δ	- espessura da camada limite a $\frac{u}{U(x)} = 0.99$
δ_1	- espessura de deslocamento
δ_2	- espessura de momento
δ_3	- espessura de energia
ϵ_δ	- critério de erro
ϵ	- critério de convergência
η_δ	- valor de η em δ
η	- nova coordenada na direção y
μ	- viscosidade, $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ν_w	- define a relação $\frac{K}{\rho}$ para fluidos não-newtonianos, $\text{N kg}^{-1} \text{seg}^n \text{m}$
ξ	- nova coordenada na direção x
ρ	- densidade, kg/m^3
τ_0	- tensão tangencial na parede, N/m^2

RESUMO

As grandezas do escoamento laminar incompressível, não-newtoniano, dentro da camada limite são obtidas através da utilização de duas equações fundamentais: conservação da massa e conservação do movimento.

Foi analisado o problema da placa plana e o de uma fonte de escoamento plana.

Para o caso de superfícies curvas dá-se um tratamento geral e particulariza-se o problema para o do cilindro circular reto. Para o último caso são impostas as condições de sucção e deslize na interface do escoamento.

É utilizado como fluido não-newtoniano, aquele que pode ser descrito pelo modelo da lei de potência; e foram determinadas grandezas importantes da camada limite para diversos índices de comportamento do escoamento, podendo ter-se uma idéia aproximada de como o escoamento é influenciado pela natureza reológica do fluido.

Com as simplificações próprias da camada limite e substituindo-se a equação do modelo, obteve-se um sistema de duas equações diferenciais parciais, vinculadas a um sistema de coordenadas, adequado para cada problema em estudo.

A equação do movimento torna-se altamente não linear, o que dificulta uma solução analítica; sendo assim, contorna-se o problema linearizando-se o modelo numérico associado.

O método de diferença finita utilizado é um método implícito, obtendo-se uma matriz de característica tridiagonal o que vem a facilitar a solução numérica.

ABSTRACT

By using the basic equation of fluid motion (conservation of mass and momentum) the boundary layer parameters for a Non-Newtonian, incompressible and laminar fluid flow, has been evaluated.

As a test, first the flate plate boundary layer is analized and after, a case with pressure gradient, allowing separation, is studied,

In the case of curved surfaces, first the problem is developed in general and after particularized to a circular cylinder. Finally suction and slip in the flow interface are examined.

The power law model is used to represent the stress strain relationship in Non-Newtonian flow. By varying the fluid exponent one can then, have an idea of how the Non-Newtonian behavior of the flow influences the parameters of the boundary layer.

Two equations, in an appropriate coordinate system has been obtained after an order of magnitude analysis of the terms in the equations of motion is performed.

In the present case the equations are highly non-linear. This problem is overcome numerically.

An implicit finite difference technic is used to solve the present problem in the computer.

C A P Í T U L O I

1. INTRODUÇÃO

De uma maneira geral os trabalhos mais comuns em fluidos não-newtonianos são os seguintes: primeiramente aqueles trabalhos cuja ênfase é dada no desenvolvimento de uma expressão realística para o tensor de viscosidade ou para alguma componente específica do mesmo, para certa classe de fluido não-newtoniano. Essas teorias são geralmente do tipo contínuo ou molecular. Outros trabalhos, do tipo experimental são voltados à caracterização e estudo de fluidos não-newtonianos, no esforço de obter-se um entendimento mais básico da natureza e comportamento não comum de tais materiais, ou a aquisição de dados precisos num campo de escoamento bem definido, comumente com o intuito de testar uma teoria constitutiva particular; outros estão envolvidos com o processamento de polímeros.

Uma análise teórica usando fluidos não-newtonianos compreenderia aqueles trabalhos onde a teoria constitutiva é usada para explicar vários fenômenos viscoelásticos ou outros; ou é combinada com a equação do movimento para resolver um dado problema de escoamento.

Também se deve citar aqueles trabalhos que envolvem correlações entre calor, massa e transferência de quantidade de movimento, bem como experimentos com fluidos biológicos; (GORDON [1]).

O estudo da Hidrodinâmica sofreu com Prandtl (1904) uma conceitual modificação importante. A teoria da camada limite dividiu o escoamento do fluido em torno de objetos em duas regiões: uma delgada próxima do objeto onde os efeitos do atrito são importantes (região viscosa) e uma externa onde o atrito pode ser desprezado (região potencial).

O objetivo desse trabalho é a determinação dos parâme-

tros da camada limite laminar em superfícies curvas sob diversas condições, estendendo-se o estudo tradicional, para o escoamento de fluidos não-newtonianos.

Utiliza-se a equação da continuidade e a equação do movimento numa forma tal que permitam a análise do escoamento sobre qualquer superfície.

Como modelo para os fluidos usa-se o "Power law" que é de simples tratamento matemático e que segundo [2] tem mostrado bons resultados na prática da engenharia. Análises de ordem de magnitude, usuais para camada limite, são aplicadas. O estudo é voltado particularmente para o problema do cilindro e placa plana; faz-se uma rápida análise para o caso de uma fonte plana de escoamento. Utiliza-se para a solução do problema um método por diferenças finitas.

Para o problema da placa plana, ACRIVOS [3], através da transformação de similaridade análoga a de Blasius, solucionou o problema para diversos índices de comportamento (desvio do escoamento em relação ao comportamento newtoniano), obtendo solução por similaridade para os perfis de velocidade e para os coeficientes de arraste.

NEVES [4], empregando uma forma aperfeiçoada do método de Von Kàrmàn-Pohlhausen, estudou os efeitos viscosos em cilindros submersos para índices de comportamento menores que a unidade, levando em conta o deslizamento na interface e usando velocidade potencial teórica. Ele cita em seu trabalho a importância do estudo de bolhas de gás para a indústria química e alimentícia onde é comum o uso de equipamentos em que as operações são diretamente ligadas às leis que governam o movimento de bolhas de gás ou vapor através de fluidos. Como exemplo cita o caso do aparecimento de bolhas de gás bidimensionais entre placas paralelas de trocadores de calor e entre placas de elétrodos. O estudo de bolhas de gás em fluidos não-newtonianos foi feito por ASTARITA [5]. BIZZELL e SLATTERY [6], usando também um método aproximado, estudaram o escoamento bidimensional e axialmente simétrico dando como exemplo a análise de uma esfera para índices de compor

tamento menores que a unidade. SCHMAL e FIGUEIREDO [7] estudaram o efeito de sucção e deslizamento na interface para a convecção forçada de fluidos sobre um cilindro circular, mostrando soluções para $n = 1$ e $n = 1.2$. Um método integral foi usado e para velocidade potencial usaram uma expressão experimental dada por Hiemenz.

Em suma a finalidade desse trabalho é apresentar um método diferente em coordenadas curvas, levando em conta o efeito de sucção e deslizamento na interface para vários índices de comportamento do escoamento.

O estudo de camada limite é muito importante para os problemas de transferência de calor e massa. Devido a importância dos fluidos não-newtonianos na indústria química e em processos industriais os fenômenos de transferência tem-se aplicado a esses fluidos.

C A P Í T U L O I I

2. TEORIA

2.1 - Generalidades

Os princípios fundamentais que devem ser satisfeitos para qualquer meio contínuo independentemente de sua constituição interna, são,

- conservação da matéria
- conservação da quantidade de movimento
- conservação da energia
- princípio do aumento da entropia.

Existem ainda leis subsidiárias, algumas vezes chamadas de relações constitutivas ou equações constitutivas que definem materiais ideais, os quais são modelos matemáticos de classes particulares de materiais encontrados na natureza; tais como,

- equação de estado para o gás perfeito
- lei de Newton da viscosidade para certos fluidos viscosos
- lei de Hooke para sólidos elásticos
- lei de Fourier para condução do calor
- equações de Euler para o corpo rígido
- lei de Ohm generalizada
- lei de Fick para a difusão.

Nesse trabalho, estamos interessados em qualquer material que seja, pelo menos, de natureza fluida e naquelas hipóte

ses constitutivas que se relacionadas ao campo de tensões, exprimam $\underline{\underline{P}}$ em termos do movimento, através de equações constitutivas.

Para o caso geral de movimento não uniforme de fluido, o tensor $\underline{\underline{P}}$ das tensões pode ser escrito em termos de uma parte isotrópica $P''g^{ik}$ e uma parte não isotrópica P'^{ik}

$$\underline{\underline{P}} = -P'' \underline{\underline{g}} + \underline{\underline{P}}' \quad (2.1)$$

onde $\underline{\underline{g}}$ é o tensor métrico.

Se P'' for identificado como a pressão termodinâmica, $\underline{\underline{P}}'$ é chamado tensor das tensões viscosas, ou tensor desviador de tensão caso P'' seja identificado como a pressão média, isto é:

$$P'' = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{P}} = \bar{P}''$$

Nesse caso (2.1) expressa $\underline{\underline{P}}$ em termos de um tensor simétrico de traço zero e um tensor esférico (LAWRENCE [8] e FLÜGGE [9]).

$\underline{\underline{P}}'$ possui a propriedade que o distingue, devido inteiramente ao movimento do fluido.

A mais geral função linear isotrópica $\underline{\underline{P}}$ de um tensor simétrico de segunda ordem $\underline{\underline{D}}$ é escrita na forma da lei de Navier - Poisson:

$$\underline{\underline{P}} = -P'' \underline{\underline{g}} + \lambda \text{tr} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{g}} + 2\mu \underline{\underline{D}} \quad (2.2)$$

onde λ e μ são coeficientes materiais (escalares) interpretados fisicamente como viscosidades do fluido.

$\underline{\underline{D}}$ é o tensor velocidade de deformação

P'' é a pressão termodinâmica

Substituindo-se a expressão (2.2) na equação do movimento chega-se a um sistema de três equações diferenciais, co-

nhecidas, pelo menos quando submetidas a certas hipóteses*, como equações de Navier-Stokes.

Chamamos de fluidos Newtonianos aqueles que seguem as hipóteses constitutivas da lei de Navier-Poisson na região de escoamento laminar; o que é verdade para muitos sistemas reais, especialmente soluções ou líquidos de baixo peso molecular (não polímeros) e praticamente todos os gases.

Para movimento incompressível de fluido Newtoniano, usando-se a expressão (2.2), chega-se ao seguinte sistema:

$$\underline{\underline{p}} = -P'' \underline{\underline{g}} + 2 \mu \underline{\underline{D}} \quad (2.3)$$

$$\text{tr } \underline{\underline{D}} = 0 \quad (2.4)$$

$$P'' = \bar{P}'' \quad (\text{pode não ocorrer para uma classe mais geral de fluidos}) \quad (2.5)$$

Aqui μ é uma constante (podendo variar com a temperatura) chamada de viscosidade Newtoniana.

A expressão (2.4) exprime a hipótese de incompressibilidade.

É de se esperar que exista uma definição de fluido bem mais geral que não seja perfeitamente especificada pelas hipóteses constitutivas da lei de Navier-Poisson.

De fato é o que ocorre com um sem número de materiais entre os quais podemos citar: soluções e fundidos de polímeros de alto peso molecular; suspensões de sólidos em líquidos ou gases (em particular sistemas em que o sólido está associado à fase líquida); asfaltos, tintas e outros.

Chamamos de fluidos não-newtonianos a uma classe de fluidos bem mais geral que a precedente que não segue as hipóteses constitutivas da lei de Navier-Poisson.

* Hipóteses de Stokes

Uma expressão um pouco mais geral que a (2.3) para o tensor das tensões seria:

$$\underline{\underline{P}} = -P'' \underline{\underline{g}} + f(\underline{\underline{D}}) \quad (2.6)$$

onde a tensão extra P' é agora, uma função "f" isotrópica (sem a restrição de ser linear) do tensor velocidade de deformação.

Com essa definição de fluido obtem-se, ainda, uma simples teoria de viscosidade não linear. A teoria moderna do contínuo para as equações constitutivas, que floresceu nos últimos vinte e cinco anos, começa com equações constitutivas funcionais bastante gerais para $\underline{\underline{P}}$ e procura determinar os limites impostos nas formas das equações por certos princípios gerais e vai particularizando as equações o menos possível.

Esse enfoque tem a vantagem de não ignorar efeitos acoplados entre diferentes tipos de comportamento (têrmico e mecânico) além de prover muitos resultados gerais aplicáveis a todas as especializações possíveis. (LAWRENCE [8] e FLUGGE [9]).

A expressão (2.6) serve muito bem para o propósito do presente trabalho.

A reologia, uma ciência bem vasta, é concernente à procura de uma equação constitutiva apropriada para materiais que falham em obedecer, ou a lei de Newton linear para fricção (se fluido), ou a lei de Hooke linear de elasticidade (se sólido); além de fornecer um modelo molecular do material.

A mecânica dos fluidos não-newtonianos e a mecânica dos fluidos newtonianos podem ser consideradas como sendo, cada uma em si, uma subdivisão da reologia.

A mecânica dos fluidos newtonianos é conhecida como o modo de se lidar com todos os problemas de escoamento de tais fluidos; e seu escopo pode ser descrito em poucas palavras: encontrar a solução da equação de Navier-Stokes para todos os problemas a valores de contorno imagináveis. Há somente uma área da mecânica dos fluidos newtonianos onde um problema conceitual aparece e esta é a turbulência. A razão, é claro, não é que as equações de Navier-Stokes falhem quando aplicadas à turbulência,

mas ao contrário, é que se procura a descrição do escoamento em termos dos valores médios da velocidade e pressão, em vez de em termos de seus valores instantâneos que são os que aparecem nas equações de Navier-Stokes.

Em reologia e particularmente em mecânica dos fluidos não-newtonianos a forma exata das equações do movimento não são conhecidas; seu campo é muito extenso e requer muito conhecimento para a sua solução.

O problema fundamental em mecânica dos fluidos não-newtonianos é o de encontrar soluções para problemas a valores de contorno, através do uso de uma equação constitutiva apropriada ao problema em estudo devendo-se manter a utilidade prática de seus resultados sob contínuo exame crítico. Do ponto de vista da matemática aplicada, a solução de problemas a valores de contorno de uma equação de movimento formulada apropriadamente pode parecer valer a pena, por si só, e então ter o valor determinado mesmo que não exista nenhum material que obedeça a esta equação, mas não seria uma situação satisfatória do ponto de vista da engenharia.

A reologia pode nos fornecer a descrição do comportamento mecânico de materiais reais, sob certas classes de campos de escoamento altamente idealizados e também fornecer algum conhecimento das relações entre as propriedades mecânicas exibidas nesses escoamentos e a estrutura molecular; mas é altamente improvável que a reologia nos forneça em um futuro previsível uma equação constitutiva à qual um material real do tipo fluido não-newtoniano obedeça sob todos os campos de escoamentos imagináveis (ASTARITA [10]).

2.1.1 - Classificação dos fluidos

a) Fluidos independentes do tempo:

Representam a classe de fluidos puramente viscosos

em que a tensão em uma partícula em certo instante independe da história da deformação até o instante considerado. Podemos citar:

a.1) Newtonianos: seguem as hipóteses constitutivas da lei de Navier-Poisson.

a.2) Pseudoplásticos: são aqueles fluidos para os quais uma tensão cisalhante infinitesimal é suficiente para se iniciar o movimento e para os quais a taxa de crescimento da tensão cisalhante com o gradiente de velocidade decresce com o aumento do mesmo.

a.3) Dilatantes: para esses a taxa de crescimento da tensão cisalhante com o gradiente de velocidade aumenta com o aumento desse gradiente.

a.4) Plásticos de Bingham: nessa categoria estão os fluidos nos quais uma tensão cisalhante finita é necessária para se iniciar o movimento e para os quais existe uma relação linear entre a tensão cisalhante excedente a inicial e o resultante gradiente de velocidade.

b) Fluidos dependentes do tempo:

Representam a classe de fluidos puramente viscosos em que a tensão num certo instante depende da história prévia do escoamento; em outras palavras dependem do tempo de aplicação da ação cisalhante.

b.1) Tixotrópicos: são os fluidos em que a tensão cisalhante decresce com o tempo.

b.2) Reopéticos: a tensão cisalhante aumenta com o tempo.

c) Viscoelásticos:

Representam a classe de fluidos nos quais removendo-

-se a ação cisalhante se recuperam em parte da deformação sofrida durante tal ação. Representam a mais geral classe de fluidos exibindo propriedades elásticas (onde aparece o fenômeno de relaxação do material) e propriedades viscosas que podem ser não-newtonianas e dependentes do tempo.

Embora um grande número de equações constitutivas complexas tenham sido desenvolvidas para materiais viscoelásticos, ainda não foram avaliadas simples equações práticas que fossem capazes de descrever quantitativamente o comportamento de materiais viscoelásticos reais sobre a faixa de escoamentos de interesse prático.

Efeitos viscoelásticos podem ser importantes em súbitas mudanças no escoamento, em escoamentos oscilatórios rápidos, em escoamentos de alta taxa de cisalhamento como encontrados em processos de extrusão e em escoamentos onde ocorrem mudanças na seção transversal. (AZIZ [11]).

Nesse trabalho, nosso interesse está voltado aos fluidos chamados pseudoplásticos e dilatantes.

Esse grupo de fluidos apresenta uma "viscosidade aparente" com significado análogo ao da viscosidade propriamente dita, sob o ponto de vista do seu comportamento nos escoamentos; sendo por essa razão possível, um tratamento geral para os fluidos newtonianos e esses dois tipos de fluidos.

Já os fluidos não-newtonianos dos demais grupos, não podem ser descritos por uma expressão analítica simples, ligando entre si tensão e taxa de deformação. A viscosidade aparente dos fluidos desse grupo depende não somente da taxa de deformação como também do tempo durante o qual a tensão permanece aplicada.

- Pseudoplásticos: Nesses fluidos as interações intermoleculares decrescem suavemente com o crescimento da taxa de deformação; esse seria o caso por exemplo: se as partículas ou moléculas inicialmente, aleatoriamente espalhadas tendessem a um alinhamento durante o cisalhamento e assim suas interações fossem minimizadas. Tal comportamento ocorre mais prontamente com partículas altamente assimétricas, as quais quando o fluido está em repouso, estão aleatoriamente emaranhadas umas as outras;

sob o cisalhamento as partículas tenderiam a um auto alinhamento tal que seus eixos maiores fossem paralelos à direção do movimento. Desde que as oscilações aleatórias são relativamente menores para grandes moléculas ou partículas em suspensão, a dissipação viscosa de energia entre tal alinhamento de partículas é menor. Esse alinhamento vai se tornando mais perfeito a altas taxas de deformação; daí a viscosidade aparente continua a decrescer até se alcançar taxas de cisalhamento extremamente altas e não ser mais possível daí para frente aumentar-se a perfeição do alinhamento. Isso vem a explicar porque muitos materiais pseudoplásticos se aproximam do comportamento newtoniano para altas taxas de deformação. Similarmente em taxas de deformação extremamente baixas o balanço entre alinhamento e dispersão é bem acentuado na direção do último. Assim sendo esse balanço não é afetado apreciavelmente por pequenas mudanças na taxa de cisalhamento e de novo um comportamento newtoniano pode ser aproximado. É de se esperar que existam outros fatores que acarretam o comportamento pseudoplástico.

- Dilatantes: Desempenham um comportamento reológico oposto aos pseudoplásticos em que a viscosidade aparente cresce com o crescimento da taxa de deformação. De acordo com a explicação dada por Osborne Reynolds (1888) ele assumiu que esses fluidos quando em repouso consistem de partículas densamente agrupadas nas quais os vazios são pequenos e talvez em número mínimo. Existe uma quantidade suficiente de fluido somente para preencher esses vazios. O movimento ou cisalhamento de tais fluidos a baixas taxas requer apenas pequenas tensões de cisalhamento já que o líquido lubrifica a passagem de uma partícula por outra. À taxas de deformação crescente o agrupamento denso das partículas sólidas é progressivamente destruído e desde que o agrupamento envolvia inicialmente um número mínimo de vazios existe agora insuficiente líquido presente para fazer com que as partículas escoem suavemente umas pelas outras. Assim a tensão cisalhante cresce mais que proporcionalmente com a taxa de deformação, (METZNER [12]).

Uma formulação de P' para fluidos não-newtonianos é um problema difícil o qual não tem progredido muito do ponto de vista teórico; conseqüentemente várias descrições empíricas tem

sido usadas com vários graus de sucesso.

Para esses dois tipos de fluidos, acima citados, uma expressão muito usada, de simples tratamento matemático, com bons resultados e adequada para analisar escoamentos como o de Couette, em tubos e canais é o modelo empírico de Ostwald-de-Waele, ou modelo "power-law", dado pela seguinte relação:

$$\underline{\underline{P'}} = - \left\{ K \left| \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta:\Delta)} \right|^{n-1} \right\} \Delta \quad (2.7)$$

onde: $\Delta = 2D_{\underline{\underline{D}}}$ (ver expressão 2.6)

$(\Delta:\Delta)$ é um dos invariantes principais de Δ .

O termo entre colchetes representaria para esse modelo a "viscosidade aparente" (μ_a) e assim a expressão (2.7) poderia ser escrita na seguinte forma:

$$\underline{\underline{P'}} = -\mu_a \Delta$$

A expressão (2.7) é útil para se descrever escoamentos em geometrias complexas e assim se expressar as componentes de $\underline{\underline{P'}}$ para materiais não-newtonianos em diversos sistemas de coordenadas (embora não nos sendo assegurado que os parâmetros K e n pudessem ser os mesmos quando determinados em vários arranjos geométricos), da seguinte maneira:

- a) Trocar μ na expressão newtoniana por μ_a ;
- b) Inserir a relação para $(\Delta:\Delta)$ no correspondente sistema de coordenadas. É o que se faz nesse trabalho. BIRD [13].

2.2 - Estudo do Modelo

Na expressão (2.7) K e n são parâmetros característicos do fluido, denominados respectivamente índice de consistência do fluido e índice de comportamento do escoamento. O primeiro caracteriza a consistência ou "thickness" de um fluido; enquanto o segundo é uma medida de como o fluido se afasta do comportamento newtoniano; para $n=1$ e $K=\mu$ temos fluido newtoniano. Para um fluido particular K e n são constantes. No caso de $n>1$ temos os fluidos dilatantes e para $n<1$ os pseudoplásticos.

Alguns valores de K e n são mostrados nas figuras (2.1) e (2.2).

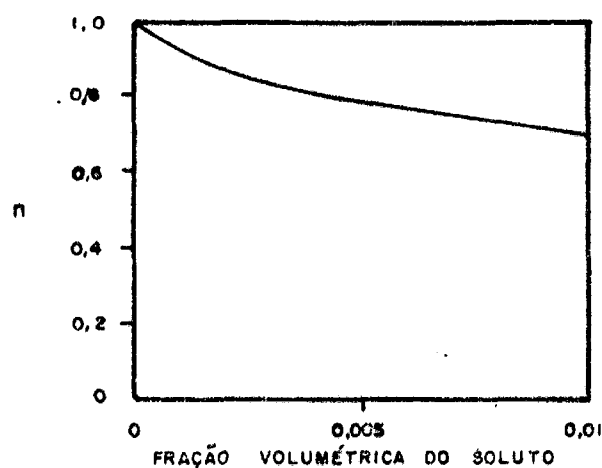


FIG. 2.1 - EXPOENTE " n " PARA SOLUÇÕES AQUOSAS DE AMÔNIA ALGINADA (AZIZ⁹)

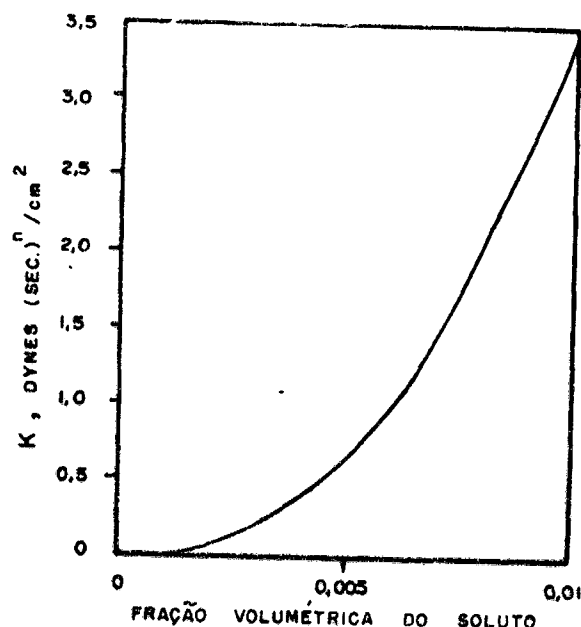


FIG. 2.2 — COEFICIENTE K PARA
SOLUÇÕES AQUOSAS DE AMÔNIA ALGINADA
(AZIZ⁹)

Devemos verificar nas figuras que aumentando-se o valor de n o valor de K diminui e vice-versa. Então: quanto maior for n menos "viscoso" é o fluido; e quanto menor for o valor de n mais "viscoso" será o fluido. Posteriormente, nesse trabalho, pode-se confirmar esse fato.

Reologistas têm-se oposto ao uso da expressão (2.7) baseados em que ela é puramente empírica, não sendo derivada de conceitos físicos. Essa crítica pode vagamente ser considerada válida tendo em vista o fato de que "conceitos físicos" sobre os quais equações teóricas são frequentemente baseadas, consistem de analogias puramente mecânicas, como molas, "dashpots and blocks", os quais tem somente uma vaga equivalência num sistema real. Contudo objeções que essa equação não retrata corretamente o comportamento de muitos fluidos reais em bem altas ou baixas taxas de cisalhamento são válidas, METZNER [12]. De fato se analisarmos a "viscosidade aparente" na equação (2.7) veremos que para o caso em que \underline{D} tender a zero e para $n < 1$ μ_a tenderá a ser infinita e para $n > 1$ μ_a tenderá a zero. Para \underline{D} tendendo a valores infinitos e para $n < 1$, μ_a tende a zero e para $n > 1$, μ_a tende a valores infinitos; resultados esses que fisicamente são absurdos, pois a viscosidade de um fluido real tem um valor fini-

to; isto é, uma resistência finita ao cisalhamento, NEVES [4]. Uma outra restrição ao modelo "power law", é que para fluidos reais n não é constante em toda a faixa de escoamento; por exemplo: já foi citado que para altas taxas de cisalhamento o escoamento tende a newtoniano e n tende a unidade. Outra objeção seria que a constante K tem dimensões dependentes de n . Outras equações empíricas propostas e que também superam algumas das objeções à lei de potência são as de: Prandtl, Eyring, Powell-Eyring e Williamson. Porém, essas equações conduzem a uma maior complexidade de análise. Sendo assim, usa-se o modelo da lei de potência que é adequado em muitas aplicações da engenharia e que segundo Neves [4], tem mostrado bons resultados.

2.3 - Apresentação do Problema

Nesse parágrafo serão apresentadas as equações fundamentais do problema, bem como suas formas simplificadas próprias ao estudo de camada limite. Se fará também uma análise rápida das limitações da teoria da camada limite para fluidos não-newtonianos.

2.3.1 - Equações gerais:

Na forma mais geral, as equações fundamentais de um escoamento incompressível e na ausência de forças de campo e em notação tensorial são:

$$u^i |_{,i} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho(\dot{u}^i + u^j u^i |_{,j}) = p^{ik} |_{,k} \quad \text{FLÜGGE [14]} \quad (2.9)$$

p^{ik} é dado em termos gerais pela expressão (2.1).

Vamos considerar escoamento bi-dimensional de um fluido incompressível sobre uma superfície curva. O sistema de coordenadas empregado é tal que o eixo dos x segue a superfície curva e o eixo dos y a ela é normal a cada ponto. Fig. (2.3):

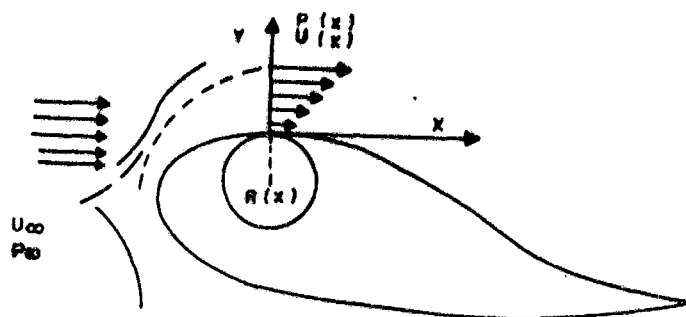


FIG. 2.3

Particularizamos o nosso problema para o caso do cilindro já que é um modelo de geometria bem conhecida e suficiente para atingirmos nossos objetivos; nesse caso $R(x) = R = \text{constante}$.

Em termos de componentes físicas de velocidade u, v e tensão parcial p'_{ik} , as equações (2.8) e (2.9) em regime permanente segundo ASTIN [15] e THOMSON [16] em coordenadas ortogonais curvilíneas tomam respectivamente as seguintes formas:

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + f \frac{v}{R} = 0 \quad (2.10)$$

direção X :

$$f \frac{\partial p'_{11}}{\partial x} + f^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'_{12}}{f^2} \right) - f \frac{\partial p''}{\partial x} = \rho f u \left[\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \right) \right] + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.11.a)$$

direção Y:

$$f \frac{\partial P'_{12}}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{22}}{f} \right) - f P'_{11} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \right) - \frac{\partial P''}{\partial y} = \rho f u \left[\frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \right) \right] + f v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.11.b)$$

onde a função f é definida como:

$$f(x,y) = \frac{R(x)}{R(x) + y}$$

e $R(x)$ é o inverso da curvatura.

2.3.2 - Equações da camada limite

A análise usual de ordem de magnitude segundo SCHOWALTER [17] e PEREIRA FILHO [18] tem sido aplicada a equação (2.11) para um fluido descrito pela expressão (2.7), (ver a pêndice 1).

Dessa maneira obteve-se as equações da camada limite. A expressão (2.7) foi desenvolvida para sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas e posteriormente simplificada. Fica-se então com o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial P'_{12}}{\partial y} + \frac{2f}{R} P'_{12} - f \frac{\partial P''}{\partial x} = \rho f u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\partial P''}{\partial y} = \rho f \frac{u^2}{R} \quad (2.12.b)$$

Essa última expressão dá o gradiente de pressão requerido para contrabalançar o efeito centrífugo do escoamento em

torno da parede curva.

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{fv}{R} = 0 \quad (2.13)$$

$$P'_{12} = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right)^n \quad (2.14)$$

Substituindo-se (2.14) em (2.12.a) e eliminando a variável P'' do sistema empregando como fez SCHLICHTING [19] a equação de Bernoulli para uma linha de corrente:

$$\frac{P_{\infty}}{\rho} + \frac{U_{\infty}^2}{2} = \frac{P(x)}{\rho} + \frac{U^2(x)}{2} = \text{cte}$$

integrando a equação (2.12.b) ao longo da camada limite:

$$\int_0^y \frac{\partial P}{\partial y} dy = \rho \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy$$

$$P(x) - P_p(x) = \rho \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy$$

Substituindo $P(x)$ na equação de Bernoulli:

$$P_p(x) = \text{cte} - \rho \left[\frac{U^2(x)}{2} + \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy \right]$$

e derivando com relação a x :

$$\frac{\partial P''}{\partial x} = -\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U^2(x)}{2} + \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy \right]$$

Substituindo-se essa expressão na equação (2.12.a), ficamos com um sistema a duas equações e duas incógnitas:

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f U_x \frac{dU_x}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy + K n \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right)^{n-1} \times \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{f}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{R^2} f^2 \right] + \frac{2 f k}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right)^n \quad (2.15)$$

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f v}{R} = 0 \quad (2.16)$$

onde U_x é conhecida do escoamento potencial.

Para o caso da placa plana as equações (2.15) e (2.16) tomam as seguintes formas respectivamente:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = K n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

e no caso de se desprezar a curvatura ou se a mesma não existir, temos as seguintes formas:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_x \frac{dU_x}{dx} + K n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

2.3.3 - Condições de contorno

Para seu estabelecimento leva-se em conta três fatos importantes:

O primeiro é a consideração de sucção na interface, o segundo o de deslizamento e o terceiro é a continuidade do campo de velocidade, na fronteira da camada limite com o escoamento externo. Sendo assim, tem-se então:

$$y = 0 \quad \frac{u}{U_x} = k; \quad \frac{v}{U_x} \leq 0$$

$$y = \delta \quad \frac{u}{U_x} = 0.99$$

2.3.4 - Limitações da teoria da camada limite para fluidos não-newtonianos

Da mesma maneira que se faz com o estudo para fluidos newtonianos define-se por exemplo: para o problema do cilindro e para o modelo "power law" um número de Reynolds geral baseado no raio, do seguinte modo:

$$Re_{\infty} = \frac{\rho R^n U_{\infty}^{2-n}}{K}$$

que facilmente se comprova ser um agrupamento adimensional. No caso particular em que $n = 1$ e $K = \mu$ essa expressão recai no caso clássico da definição do número de Reynolds: (METZNER [12], ACRIVOS [3], SCHOVALTER [17])

$$Re_{\infty} = \frac{\rho R U_{\infty}}{\mu}$$

Cabe agora examinar-se brevemente as condições sob as

quais escoamentos do tipo camada limite laminar seriam esperados ocorrer, lembrando que as equações da camada limite não são exatas, mas sim formas assintóticas de relações hidrodinâmicas básicas, quando o número de Reynolds é alto. Esse estudo foi feito por Acrivos [3] e também lembrado por Neves [4] em sua tese de mestrado.

As conclusões são as seguintes:

a) Todos os fluidos se aproximam do comportamento newtoniano se U_∞ é suficientemente pequeno e, de acordo com a solução de Stokes, os termos inerciais da equação do movimento devem ser desprezados;

b) Para $n < 2$, escoamento do tipo camada limite, pode ser obtido se U_∞ é grande e, portanto o número de Reynolds é feito suficientemente grande;

c) Para $n > 2$ e moderados valores de U_∞ , as aproximações da camada limite devem ser introduzidas desde que $N_{Re} \gg 1$. Para altos valores de U_∞ os termos inerciais devem novamente ser desprezados quando $N_{Re} \rightarrow 0$. Além disso embora a expressão do número de Reynolds nos diga que $N_{Re} \rightarrow \infty$ quando $U_\infty \rightarrow 0$, escoamento de camada limite não ocorre, quando a velocidade característica do fluido é pequena, por causa do modelo "power law", que só é válido para valores moderados do gradiente de velocidade, $\frac{\partial u}{\partial y}$, conforme mostrado por Metzner [12]. É evidente por tanto que quando $n > 2$ a camada limite não é um estado assintótico de movimento laminar, que é aproximado, quando U_∞ é feito suficientemente grande. Quando muito, deve haver um estado intermediário onde aproximações da camada limite são válidas, que caem entre regiões caracterizadas pelo fato que os termos inerciais nas equações do movimento devem ser desprezados. Isto mostra que quando $n > 2$ escoamento de camada limite laminar, não são de grande interesse prático, porque seu limite de validade parece ser bastante limitado.

C A P Í T U L O I I I

3. TRATAMENTO NUMÉRICO

As equações obtidas no capítulo anterior são altamente não lineares o que dificulta uma solução analítica; sendo assim, essas equações foram trabalhadas para uma solução numérica. Foram adimensionalizadas e sofreram uma mudança de variáveis com a finalidade de contornar o rápido crescimento da camada limite na direção x .

Seguiu-se a discretização em torno de um ponto genérico $P_{i+1/2,j}$ e posteriormente a linearização das equações.

Para a solução do sistema de equações parabólicas utilizou-se um método numérico implícito de diferenças finitas (SMITH [20], CARNAHAN [21], AMES [22]) aproveitando-se a característica tridiagonal das equações. Esse método não oferece restrição quanto ao tamanho da malha de diferenças finitas, porém a única dificuldade é que quanto maior o incremento na direção x , menor a precisão dos resultados.

3.1 - Adimensionalização

As equações (2.15) e (2.16) foram adimensionalizadas segundo novas variáveis:

$$u = \frac{u_{\text{físico}}}{U(x)} \quad ; \quad v = \frac{v_{\text{físico}}}{U(x)} \quad (3.1)$$

e para as variáveis independentes fez-se a transformação (em ana

logia a PEREIRA FILHO [18] para fluidos newtonianos) de x para ξ e de y para η , assim definidas:

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{v_w^{\frac{1}{n}}} dx \quad (3.2)$$

$$\eta(x,y) = \frac{y \cdot U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{v_w^{\frac{1}{n}} (2\xi)^N} \quad (3.3)$$

onde N é em geral uma função de ξ e é determinado com o requerimento de que η_δ seja constante.

Resolvendo (3.3) para N obtemos:

$$N = \frac{\ln \left[\frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{U(0)^{\frac{2}{n}-1}} \frac{\delta}{\delta_0} (2\xi_0)^{N_0} \right]}{\ln(2\xi)}$$

Para camadas limites onde o perfil de velocidade e espessura δ variam rapidamente o valor de N também varia rapidamente e assim um longo procedimento de iteração seria requerido para sempre se satisfazer a expressão (3.3). Uma outra alternativa é especificar N como constante. SCHLICHTING [19] aconselha para camada limite laminar (newtoniano) o valor 0.5. Para o presente caso foi verificado que se $N = \frac{1}{n+1}$, se obtém para a placa plana (além de η_δ constante) solução por similaridade recaindo-se para $n=1$ (newtoniano) na famosa solução de Blasius. Isso foi analisado tomando-se as equações (2.17) e (2.18) e transformando-as em uma equação diferencial ordinária em η em analogia a Blasius. Com isso verificou-se a condição $N = \frac{1}{n+1}$. Para problemas com gradiente de pressão manteve-se o mesmo valor para N , porém o valor de η_δ é aos poucos corrigido conforme se verá. Com a

utilização dessas relações, as equações (2.15) e (2.16) serão respectivamente: (ver apêndice 2)

$$\begin{aligned}
 (2\xi)^{2N} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} &= (2\xi)^{2N} \frac{f}{U_x} \frac{dU_x}{d\xi} \{1 - u^2 + 2 \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta + \\
 &+ \frac{f u^2 \eta (\frac{2}{n} - 1)}{R\eta} \} + (2\xi)^{2N} f \{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta - \frac{f u^2 \eta N}{R\eta \xi} \} + \\
 &+ \frac{n}{(2\xi)^{N(n-1)}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{R\eta} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{f}{R\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f^2 u}{R\eta^2} \right) + \\
 &+ \frac{2}{(2\xi)^{N(n-1)}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{R\eta} \right)^n \frac{f}{R\eta} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2\xi)^{2N} f \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2\xi)^{2N} f u \frac{1}{U_x} \frac{dU_x}{d\xi} \left(\frac{2n-2}{n} \right) + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \\
 + (2\xi)^{2N} \frac{u f N}{\xi} + \frac{f V}{R\eta} = 0 \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

onde a nova variável V introduzida é função de v:

$$v = \frac{V}{(2\xi)^N} - \frac{v_w^{\frac{1}{n}} (2\xi)^N}{U_x^{\frac{2}{n}-1}} f u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 e \quad R\eta : \\
 R\eta = \frac{R(x) U_x^{\frac{2}{n}-1}}{(2\xi)^N v_w^{\frac{1}{n}}} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

obs.: se fizermos: $f = 1$

$$R_\eta = \infty$$

$$\frac{dU_x}{d\xi} = 0$$

teremos a equação para a placa plana ou mantendo-se $\frac{dU_x}{d\xi} \neq 0$ seria o caso próprio para o estudo de canais divergentes ou convergentes ou outras situações.

3.2 - Discretização

Dado o comportamento da camada limite foi conveniente escolher-se uma malha variável com pequenos intervalos próximo a parede e cada vez maiores à medida que a distância da parede cresce, tendo em vista que as variações das propriedades nas proximidades do campo do escoamento principal são menores. Assim a relação entre dois intervalos adjacentes é tal que $\Delta\eta_j = B_k \cdot \Delta\eta_{j-1}$ onde ($B_k > 1$). Na outra direção (ξ) a malha pode ou não, ter intervalos constantes dependendo do caso analisado. Para superfícies com pequeno raio de curvatura é conveniente que $\Delta\xi$ seja variável. A figura 3.1 mostra a malha de diferenças finitas.

A discretização das equações foi feita em torno do ponto genérico e médio P. O valor de uma função nesse ponto é dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (F_{i,j} + F_{i+1,j}) \quad (3.8)$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (F_{i,j} + F_{i+1,j} + F_{i,j+1} + F_{i+1,j+1}) \quad (3.9)$$

As derivadas com respeito a η e ξ são aproximadas com precisão de primeira ordem e são assim representadas:

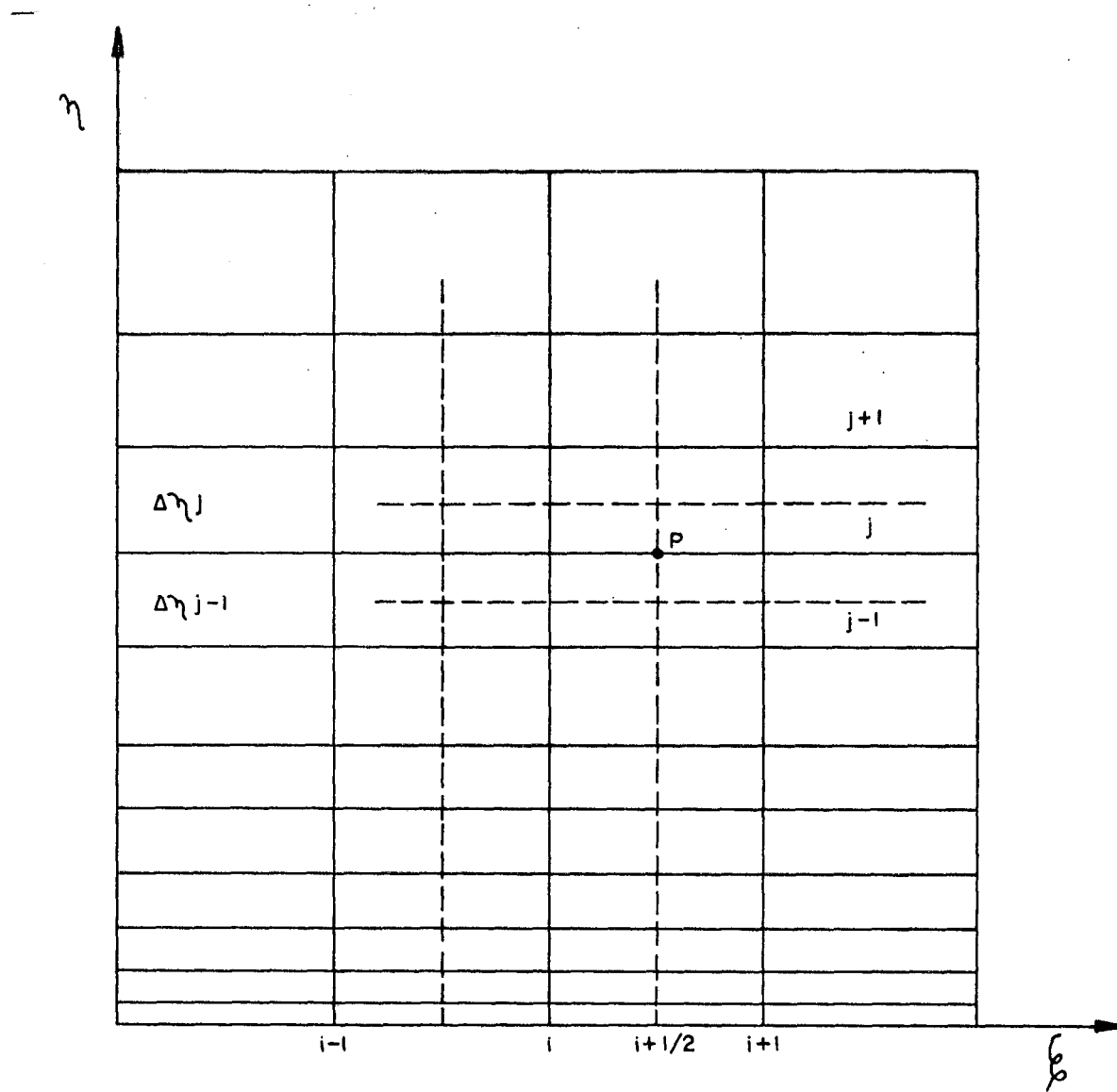


Fig. 3.1

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{\Delta \xi} \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \eta} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1} + F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (3.11)$$

Desde que é difícil aproximar a derivada segunda com precisão de primeira ordem, ela é discretizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j}}{\Delta \eta_j(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta \eta_j(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \\ &- \frac{F_{i+1,j} - F_{i+1,j-1}}{\Delta \eta_{j-1}(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta \eta_{j-1}(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Os termos não lineares que aparecem na equação do movimento são linearizados do seguinte modo geral:

$$\begin{aligned} A \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^m \Big|_{i+\frac{1}{2},j,\ell} &= \\ &= A_{i+\frac{1}{2},j,\ell} \cdot \left(\frac{F_{i+1,j+1,\ell-1} - F_{i+1,j-1,\ell-1} + F_{i,j+1,\ell-1} - F_{i,j-1,\ell-1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \right)^m \end{aligned}$$

onde ℓ representa a iteração atual e $\ell - 1$ representa a anterior. O próximo passo é introduzir essas formas na equação (3.4) e assim a equação do movimento toma o seguinte aspecto:

$$A_j u_{i+1,j+1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j-1} = D_j \quad (3.13)$$

(ver apêndice 3 para os detalhes)

A equação (3.13) forma um sistema tridiagonal de equações lineares as quais podem facilmente serem resolvidas para o vetor $u_{i+1,j}$ se conhecermos a distribuição prévia de $u_{i,j}$. Esse sistema é constituído de N_{p-2} equações com N_{p-2} incógnitas onde N_p é o número de pontos na direção y .

A solução para esse sistema é dada por AMES [22] e pode ser assim expressa:

$$F_{i+1,j} = G_j F_{i+1,j+1} + g_j \quad (3.14)$$

Começa-se o cálculo pelo ponto mais alto da camada limite indo-se em direção à interface. Sendo assim, o valor $F_{i+1,j}$ é o desconhecido. Na expressão (3.14) os valores de G_j e g_j são:

$$G_j = - \frac{A_j}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (3.15)$$

$$g_j = \frac{D_j - C_j g_{j-1}}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (3.16)$$

As mesmas expressões estão sujeitas as seguintes condições de contorno:

$$u_1 = 0 \rightarrow G_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_1 = 0$$

$$u_1 = K \rightarrow G_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_1 = k \text{ (deslize na interface)}$$

As fórmulas (3.15) e (3.16) devem ser aplicadas começando-se da interface.

Se analisarmos os coeficientes na expressão (3.13), (ver apêndice 3), veremos que o método tridiagonal exige o conhecimento da função numa estação anterior para a determinação da mesma na estação atual. Assim, fornece-se para a estação inicial ($i = 1$) perfis de velocidade (ver capítulo 4).

De acordo com o que se falou na seção (3.1) é necessário se corrigir o valor de η_δ ou $\eta_{\text{máximo}}$; assim deve-se variar o número de pontos N_p na direção η .

Como tradicionalmente é feito para a camada limite escolheu-se $u_\delta = 0.99$ como ponto de cálculo para a espessura da mesma. Assim assume-se que no contorno superior da camada limite deve ser fisicamente requerido a seguinte condição:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta = \eta_\delta} \leq \epsilon_\delta \quad (3.17)$$

onde ϵ_δ é um pequeno critério de erro pré-fixado. Em diferença finita a expressão (3.17) fica:

$$u_{i+1, N_p} - u_{i+1, N_{p-1}} \leq \Delta \eta_{N_{p-1}} \epsilon_\delta \quad (3.18)$$

Com o uso da expressão (3.14) e lembrando que para $\eta = \eta_\delta$, $u_\delta = 0.99$, a expressão (3.18) toma a seguinte forma:

$$u_\delta (1 - G_{N_{p-1}}) - g_{N_{p-1}} \leq \Delta \eta_{N_{p-1}} \epsilon_\delta \quad (3.19)$$

que quando satisfeita fornece o número N_p de pontos na vertical. Foi especificado o valor de 6×10^{-4} para ϵ_δ . Para cada estação é desenvolvido um certo número de iterações; assim é necessário um critério para saber-se quando obtém-se convergência. Depois de se calcular $u_{i+1, j, \ell}$, se recalcula os valores de $V_{i+\frac{1}{2}, j}$ com a equação da continuidade. E assim o ciclo iterativo prossegue até que a convergência para $u_{i+1, j}$ é conseguida. O crité-

rio usado é apresentado por PEREIRA FILHO [18] e é assim definido:

$$\left| \frac{u_{i+1,2,\ell} - u_{i+1,2,\ell-1}}{u_{i+1,2,\ell-1}} \right| \leq \varepsilon$$

onde ε foi prescrito na faixa (0.0005 - 0.001).

Devemos observar que para a determinação de $u_{i+1,j}$ atual é necessário o perfil $V_{i+\frac{1}{2},j}$; assim deve-se ter para o início das operações um perfil $V_{i+\frac{1}{2},j}$ para V . Foi usado o valor nulo ($V=0$) como poderia se ter usado a expressão (3.6), fazendo $v=0$:

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_w \frac{1}{n} (2\xi)^{2N}}{U_x \frac{2}{n}-1} f \cdot u \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}$$

As condições de contorno para $\eta=0$, com o auxílio de (3.6) ficam:

para $v=0 \rightarrow V=0$ (sem sucção na interface)

para $v<0 \rightarrow V=v(2\xi)^N$ (com sucção na interface)

3.3 - Procedimento Computacional

Pode-se resumir nos seguintes passos:

a) Juntamente com as diversas constantes entra-se com uma expressão algébrica para o perfil de velocidade inicial ($u_{i,j}$) bem como para a espessura inicial da camada limite. A subrotina TABLE2 tem a função de adaptar o perfil de velocidade à malha de diferença finita e fornecer o número N_p inicial, de pontos na vertical. Poder-se-ia entrar com valores experimentais.

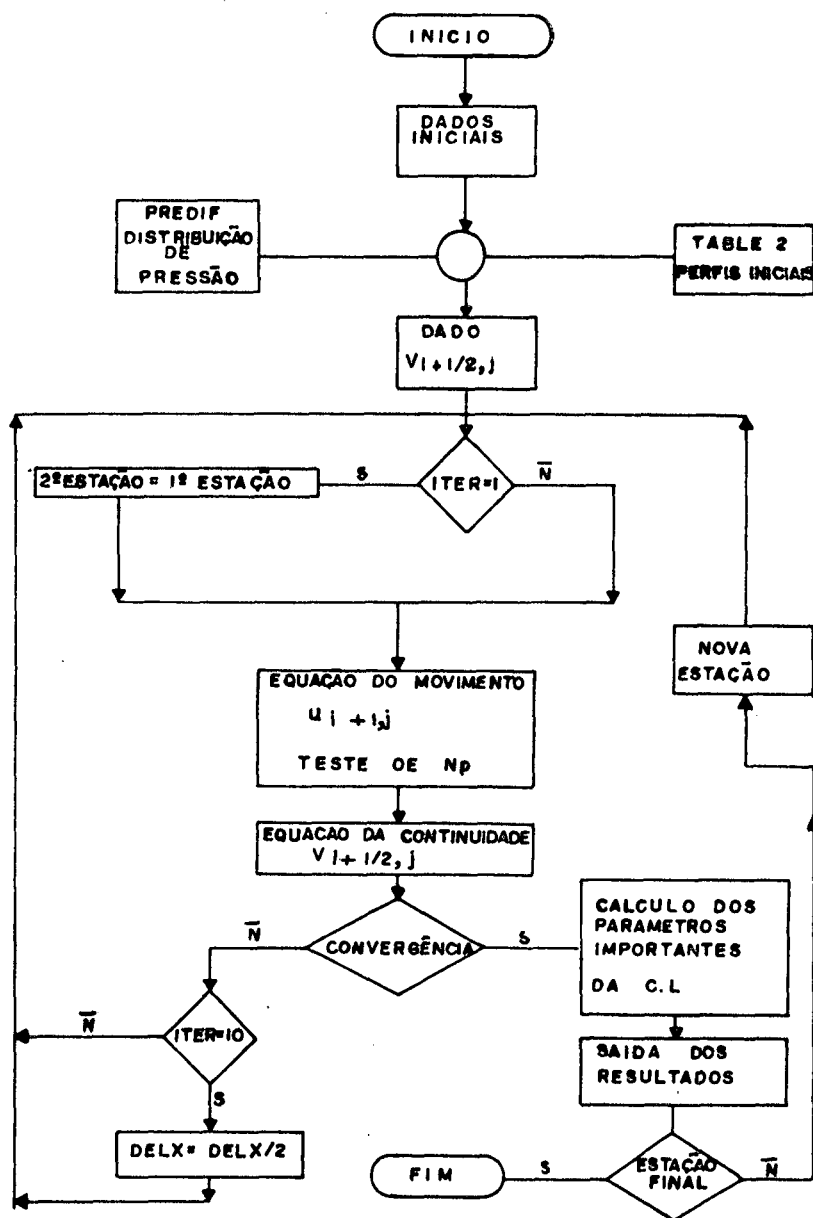
com

b) A distribuição de pressão pode ser fornecida analiticamente (pressão teórica) ou na forma discreta, com o auxílio de uma função de interpolação lagrangiana; isso é feito através da subrotina PREDIF. No presente trabalho utilizamos para o escoamento potencial a velocidade teórica $U(x) = 2 U_{\infty} \sin(\frac{x}{R})$; dessa maneira trabalhou-se em termos de velocidade. Um perfil experimental poderia ter sido usado.

c) Com os dados acima e fazendo-se inicialmente $V_{i+\frac{1}{2},j} = 0$ e $u_{i+1,j} = u_{i,j}$, soluciona-se o algoritmo tridiagonal para a equação do movimento, testando-se simultaneamente o valor de N_p . Determina-se assim, o valor de $u_{i+1,j}$ e com o auxílio da equação da continuidade, determina-se o novo valor de $V_{i+\frac{1}{2},j}$. O ciclo iterativo prossegue até satisfazer o critério de convergência pré-estabelecido. Se depois de dez iterações, usando-se $\Delta\xi$ constante não se alcançar convergência, toma-se a metade de $\Delta\xi$ e continua-se o ciclo. Estando satisfeito o critério de convergência, calcula-se os parâmetros importantes da camada limite para logo em seguida se ter a saída dos resultados.

d) Depois de (c) nova estação será calculada, recomençando-se todo o processo iterativo. Quando atingir-se o ponto em que as hipóteses da camada limite não são mais válidas, para-se o programa. Para a placa plana isso é feito a partir do momento em que se consegue similaridade.

Um diagrama de bloco ficaria:



C A P Í T U L O I V

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A melhor análise para um processo numérico é a comprovação com a solução analítica exata. Quando isso não for possível, recorre-se a trabalhos experimentais.

O método de cálculo do presente trabalho é comparado no caso da placa plana com Acrivos [3] para fluidos não-newtonianos e Blasius (para fluido Newtoniano). Para a fonte plana de escoamento, compara-se o método com SCHLICHTING [19] para fluido newtoniano e estende-se a fluidos não-newtonianos. Para o caso do cilindro, compara-se o método com Neves [4], Slaterry [6], Figueiredo [7] (para fluidos não-newtonianos e também newtonianos) e com SCHLICHTING [19] exclusivamente para fluido newtoniano.

4.1 - Resultados Obtidos

Traçou-se diagramas de velocidade, tensão na interface e das espessuras da camada limite sob certas condições de contorno.

4.1.1 - Diagramas de velocidade

Foram registrados:

a) $\frac{u}{U_{\infty}}$ versus $\frac{y}{x} Re_x^{\frac{1}{n+1}}$ para o caso da placa plana.

Na figura 4.1 aparecem os perfis similares de velocidade para os pseudoplásticos em perfeito acordo com ACRIVOS [3], e newtoniano de acordo com a solução de BLASIUS. Para índices de comportamento do escoamento cada vez menores que a unidade a "viscosidade" vai aumentando. De fato é o que se observa na figura 4.1, através do aumento da espessura da camada limite no sentido decrescente de n . Observa-se também que o fluido de $n = 0.5$ tem um comportamento aproximadamente Newtoniano numa boa faixa dentro da camada limite.

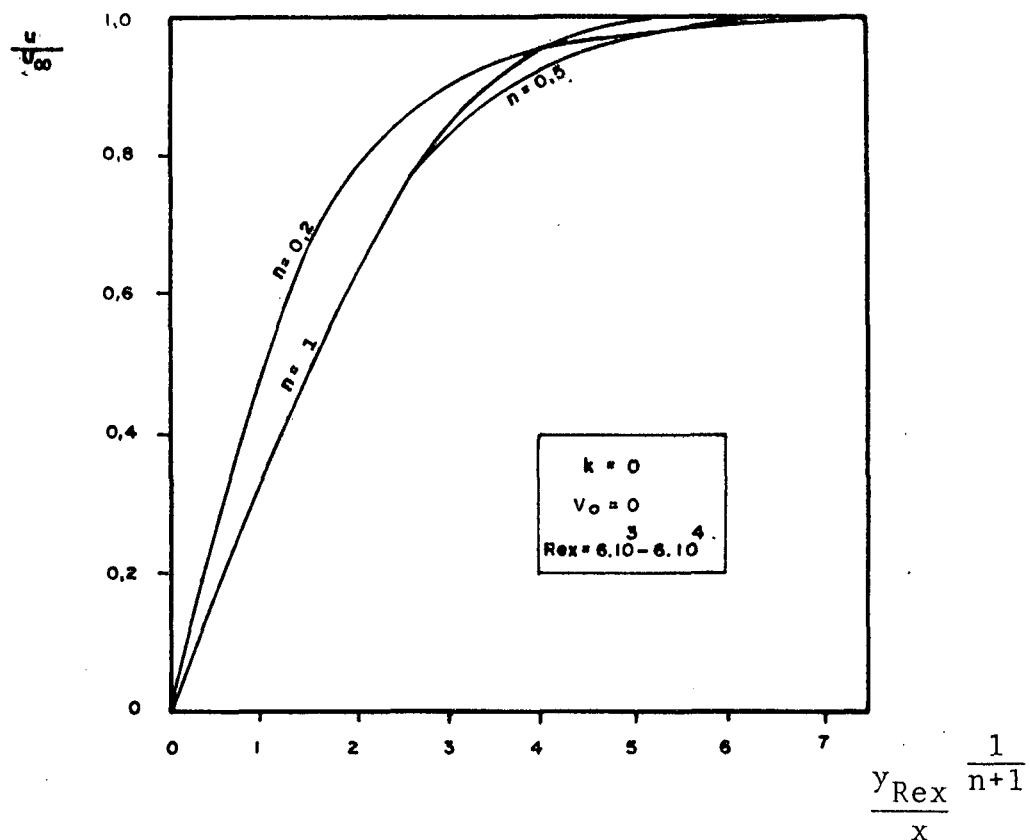


Fig. 4.1 - Perfis de velocidades sobre a placa plana para fluidos pseudoplásticos.

Na figura 4.2 vemos os perfis similares para os fluidos dilatantes. Pode-se verificar que à medida que n cresce a "viscosidade" diminui ou diminui a espessura de camada limite; observa-se que para altas taxas de deformação esses fluidos tem aproximadamente um comportamento newtoniano. Esses resultados também estão em acordo com ACRIVOS [3]. Para a fonte plana de escoamento, temos os gráficos $\frac{u}{U_0}$ versus $\frac{y}{\delta}$, onde usou-se para velocidade potencial: $U(x) = U_0 \frac{a}{x}$. (Fig. 4.3)

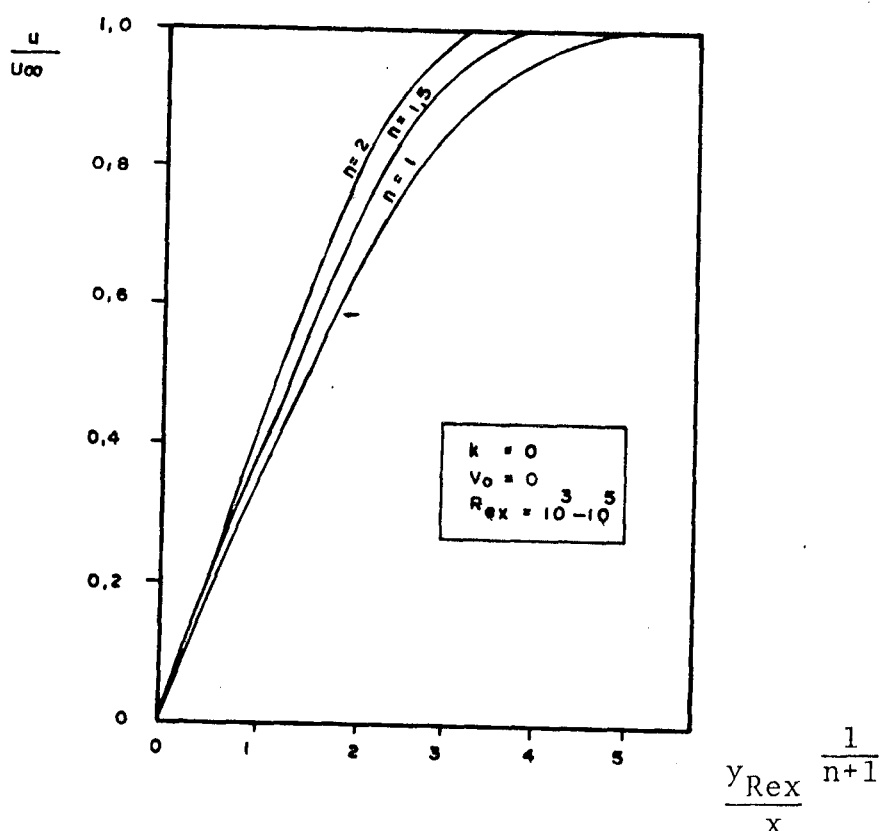


Fig. 4.2 - Perfis de velocidades sobre a placa plana fluidos dilatantes..

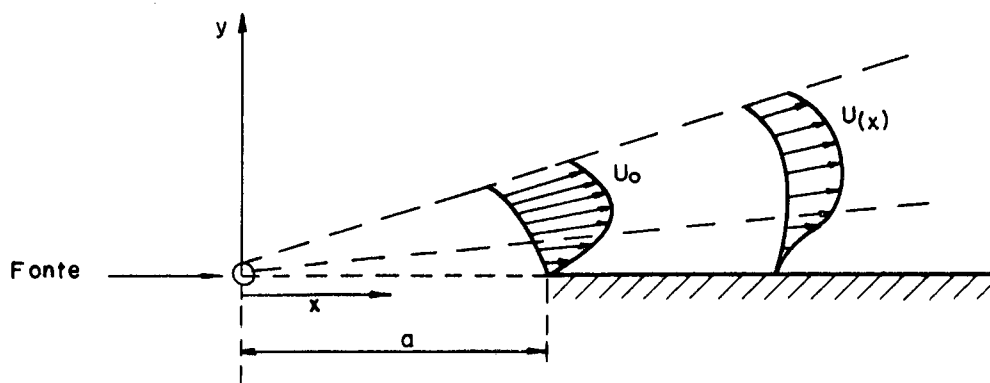


Fig. 4.3

Apresenta-se os resultados para $n = 0.5$ - $n = 1$ - $n = 2$, nas figuras 4.4, 4.5, 4.6, onde aparecem em cada gráfico três curvas de velocidade. Para fluido newtoniano o ponto de separação está a aproximadamente $\frac{x}{a} = 1,21$ independentemente do ângulo de divergência; resultado de acordo com SCHLICHTING [19]. Pag.211. Observa-se que para pseudoplásticos $n = 0.5$ (maior "viscosidade") o ponto de separação é mais distante aproximadamente 1,25 e para dilatante $n = 2$ (menor "viscosidade") esse ponto é mais adiantado estando entre 1,16 e 1,17.

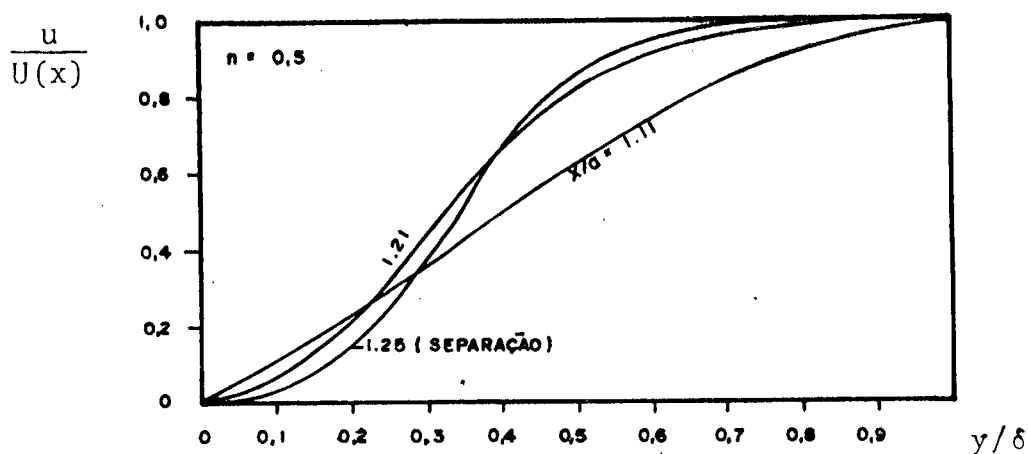


Fig. 4.4 - Perfis de velocidade numa fonte plana para um fluido pseudoplastico.

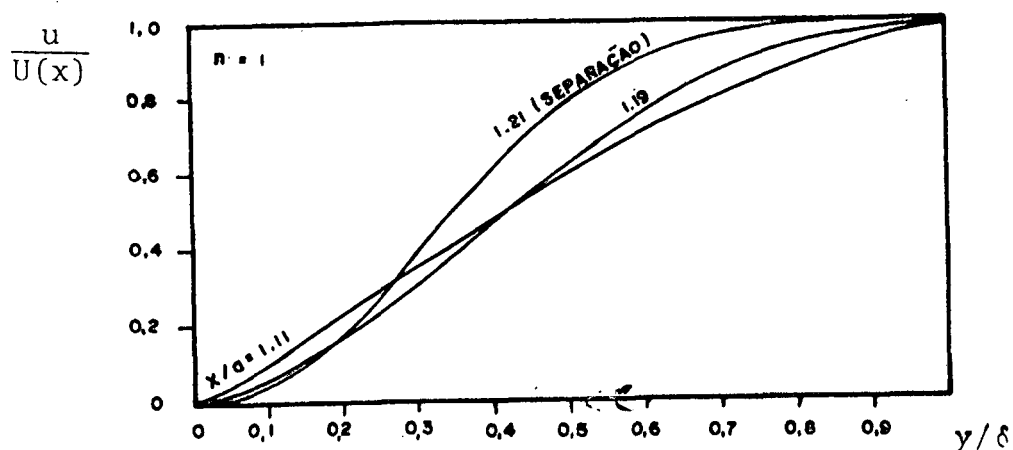


Fig. 4.5 - Perfis de velocidade numa fonte plana para fluido newtoniano.

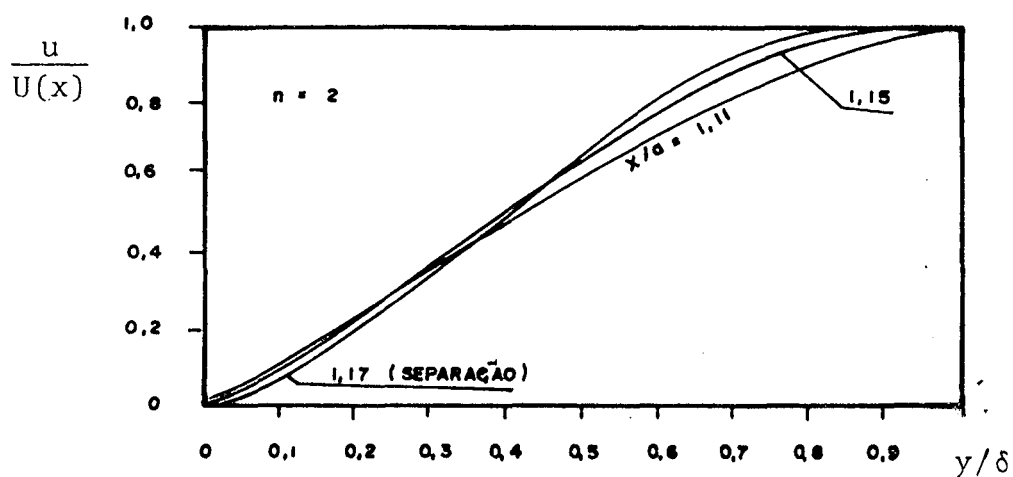


Fig. 4.6 - Perfis de velocidade numa fonte plana para um fluido dilatante.

4.1.2 - Análise do coeficiente de arraste

1. Placa Plana:

Obtidos os perfis de velocidade, calculou-se através da subrotina DER a derivada da velocidade na parede e com isso a tensão e assim obteve-se:

$$C_f(n) = \frac{\tau_o}{\rho U_\infty^2} Re_x^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(2\xi)^N} \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} Re_x^{\frac{1}{n+1}}$$

Na tabela 4.1 aparecem os resultados comparados com ACRIVOS [3] (exatos) e com o método devido a Pohlhausen (aproximado) e também aparece a solução de BLASIUS para $n=1$ (Newtoniano).

Tabela 4.1 - Valores dos coeficientes de arraste para a placa plana.

n	cf (n)			
	BLASIUS	APROXIMADO	ACRIVOS	PRESENTE TRABALHO
0,2		0,750	0,8725	0,8724
0,5		0,518	0,8735	0,5870
1,0	0,332	0,325	0,3521	0,3340
1,5		0,238	0,2189	0,2195
2,0		0,169	0,1612	0,1590

Da mesma maneira calculou-se $C_f(x)$ para a fonte plana com $n = 0.5$, $n = 1$, $n = 2$. Podemos verificar que à medida que n cresce a "viscosidade" diminui e se n diminui a "viscosidade" aumenta; o que vem a mostrar o adiantamento ou atraso do ponto de separação. Para $n = 1$ o resultado está de acordo com SCHLICHTING [19]. (Fig. 4.7)

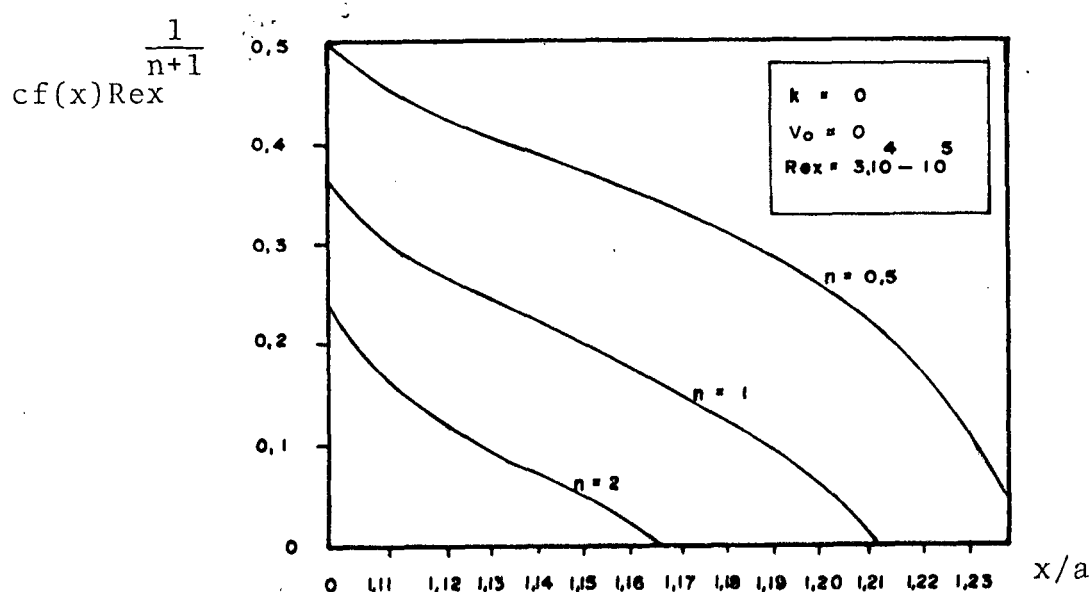


Fig. 4.7 - Valores dos coeficientes de arraste para a fonte plana.

2. Cilindro:

Na figura 4.8 aparecem os valores de $\frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} Re_\infty^{\frac{1}{n+1}}$

versus $\phi = \frac{x}{R}$, para diversos valores de n . Devemos observar que para $n > 1$ os valores dos coeficientes de arraste são maiores que os coeficientes dos fluidos de $n \leq 1$, para escoamento acelerado.

Para regiões como proximidades do ponto de estagnação e ponto de separação, são menores, onde podemos observar um adiantamento do ponto de separação. Para $n < 1$, ocorre o inverso. Para $n = 1$ os resultados estão de acordo com SCHLICHTING [19] estando o ponto de separação aproximadamente em 107° . Para $n < 1$ os resultados estão qualitativamente de acordo com NEVES [4] e ressalvadas as diferentes condições estão em acordo com SLATERRY [6]. A faixa dos valores do ponto de separação vai de 115° a 122° . Para $n > 1$ os resultados estão (ressalvado o uso no presente trabalho, de perfil de velocidade potencial teórico) qualitativamente de acordo com FIGUEIREDO [7] e a faixa dos valores dos pontos de separação vai de aproximadamente 99° a 102° . Os valores dos pontos de separação são aproximados já que é difícil aproximar-se dos mesmos durante o processo de computação.

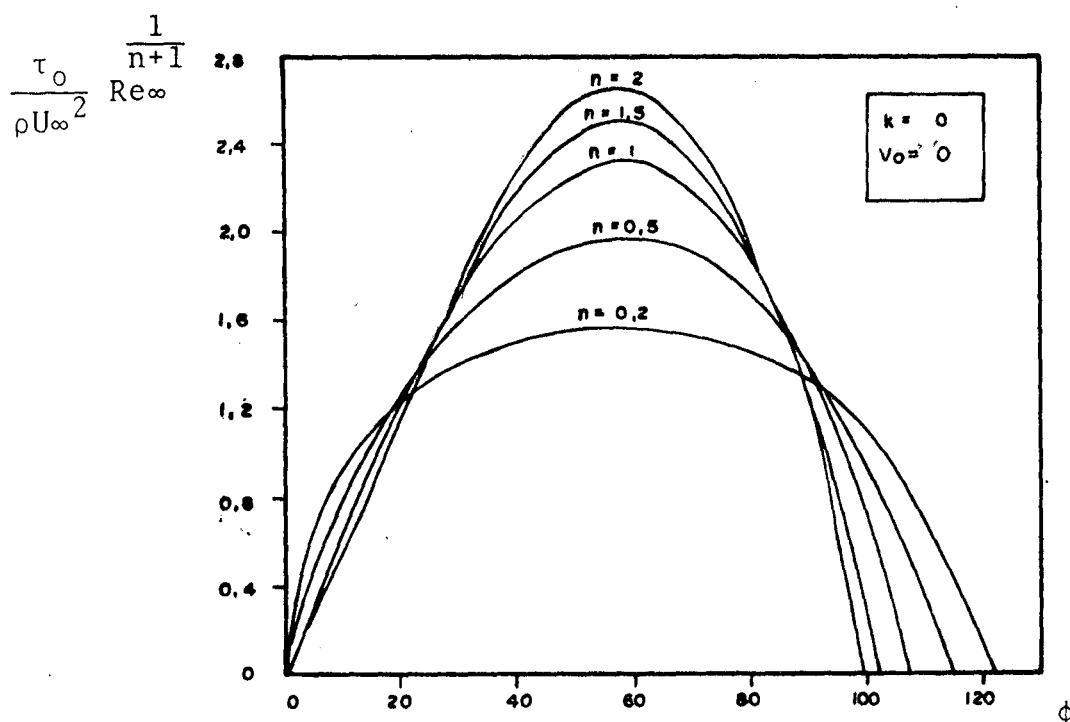


Fig. 4.8 - Coeficiente de arraste para o cilindro.

Nas figuras 4.9 e 4.10 aparecem o efeito causado pela sucção na interface, para $n = 0.5$, $n = 1$ e $n = 1.5$, onde $v_0 = \frac{-v_{\text{parede}}}{U(x)} = \text{constante}$. Essa condição foi aplicada a partir de aproximadamente 10° . Observa-se que a partir que n aumenta

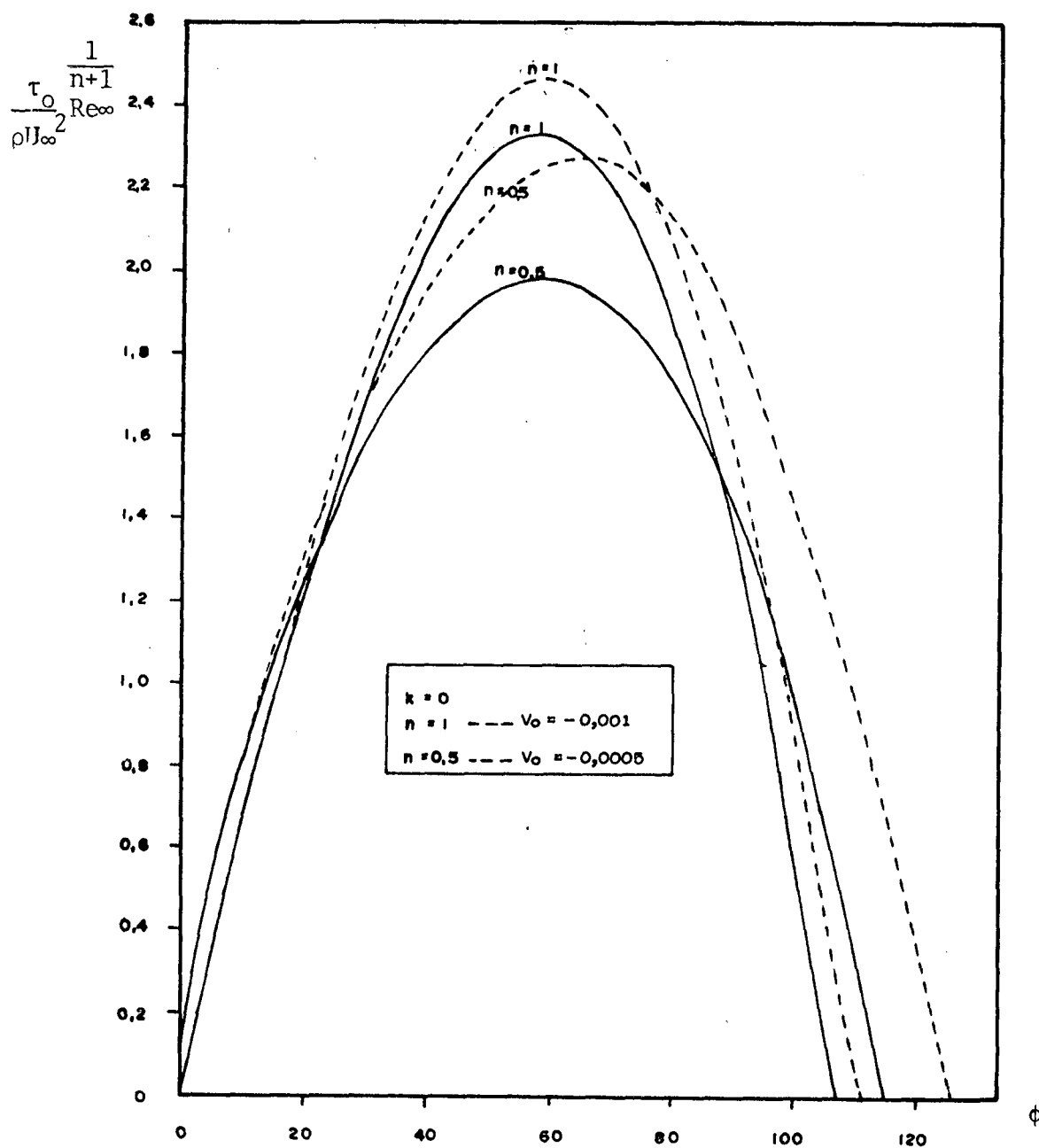


Fig. 4.9 - Coeficientes de arraste com sucção na interface.

("viscosidade" diminui) os efeitos da sucção são cada vez menores. Para $n=0.5$ e mesmo com $v_0 = -0,0005$ valor menor que $-0,001$ temos ainda um efeito bem maior do que para $n=1$. Como era de se esperar, os pontos de separação são deslocados para ângulos maiores, fato que vem a mostrar um controle sobre a camada limite. Para $n=1.5$ os efeitos começam a aparecer somente a partir de um ângulo de aproximadamente 26° . Para todos os fluidos, o efeito de sucção é mais acentuado na região de desaceleração do

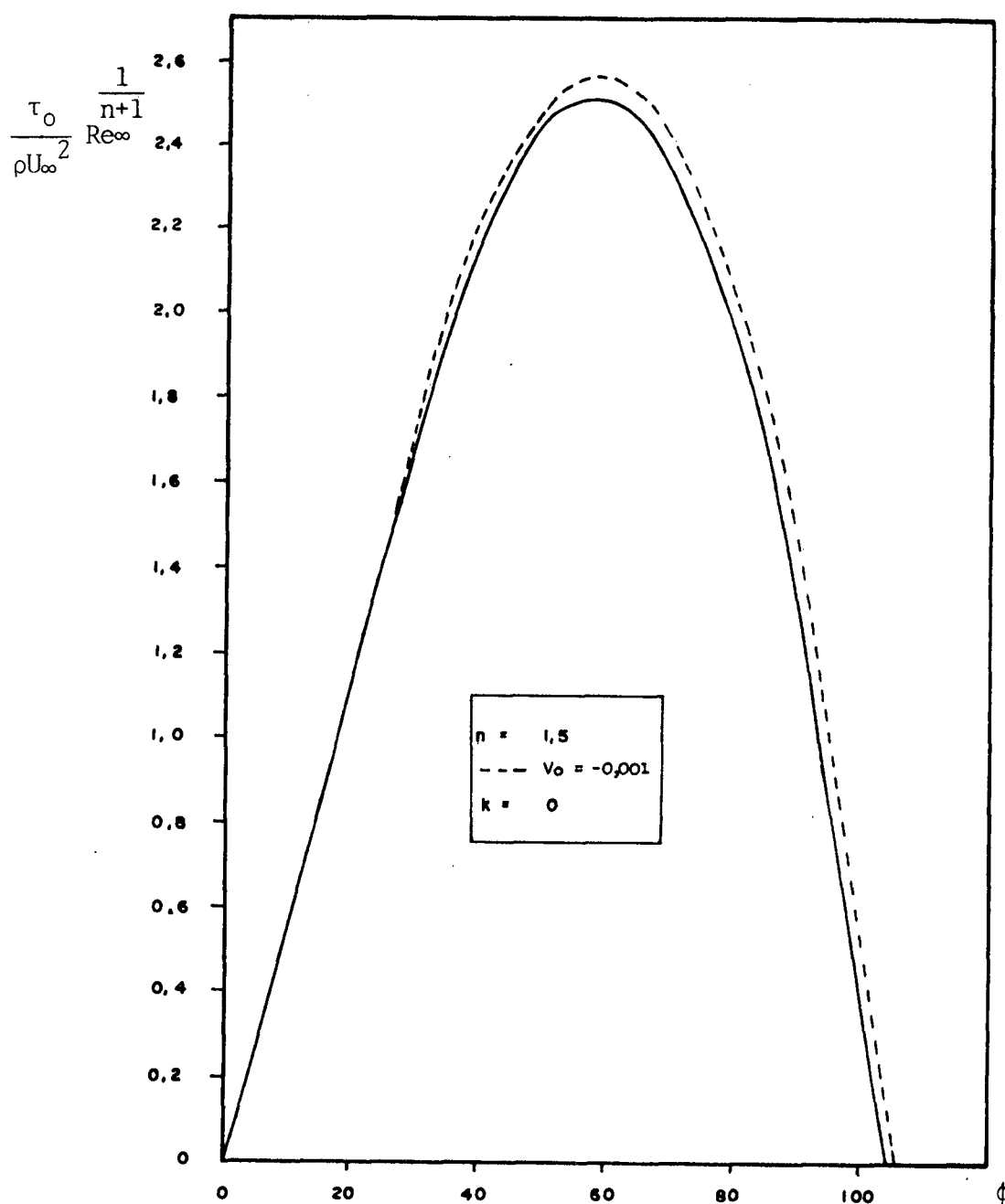


Fig. 4.10 - Coeficiente de arraste com sucção na interface.

escoamento. Esses resultados estão qualitativamente de acordo com o trabalho de FIGUEIREDO [7] para $n=1$ e $n=1.2$.

Nas figuras 4.11 e 4.12 mostramos os efeitos do deslizamento na interface para $n=1$, $n=0.5$ e $n=1.5$.

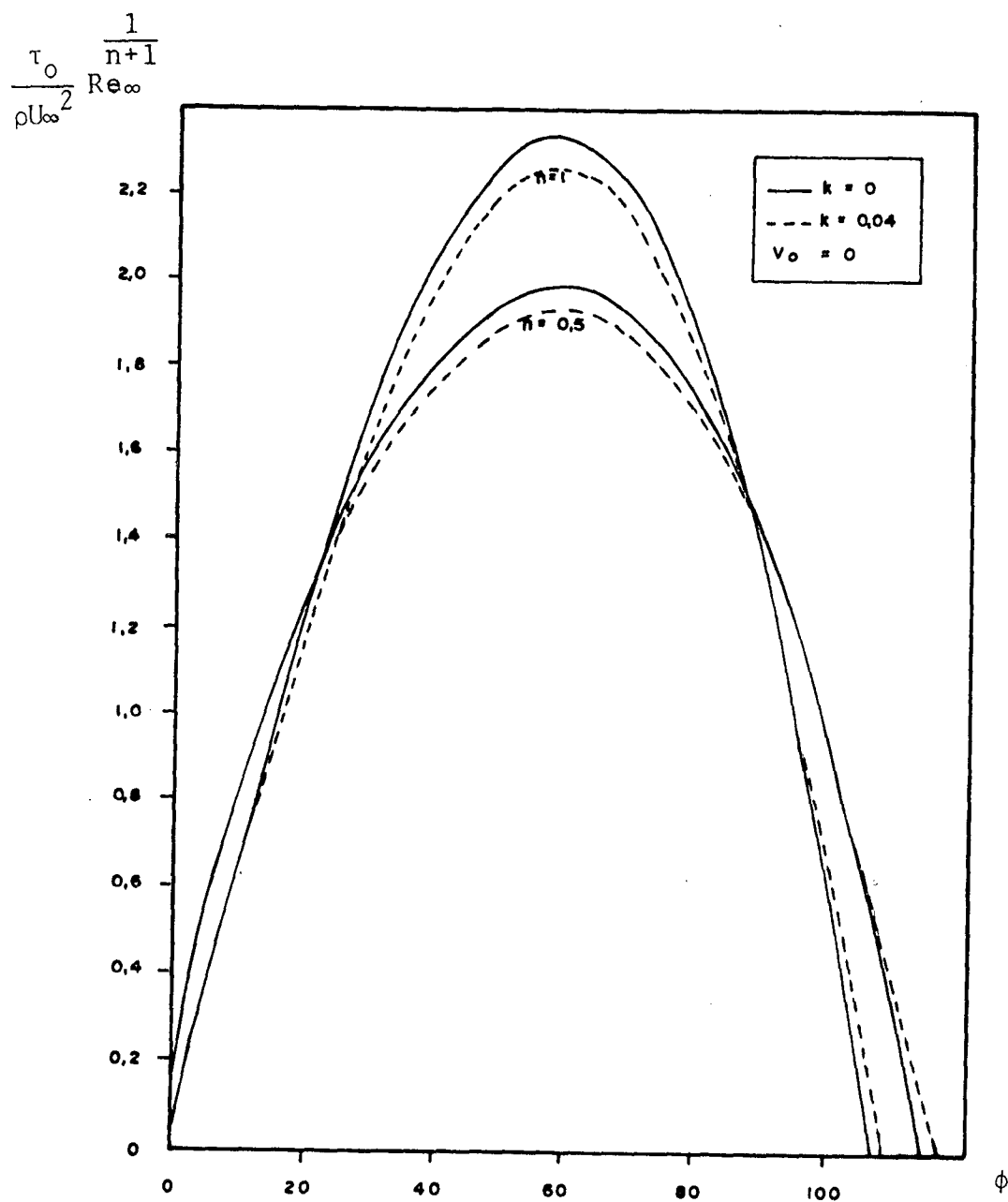


Fig. 4.11 - Coeficientes de arraste com deslizamento na interface.

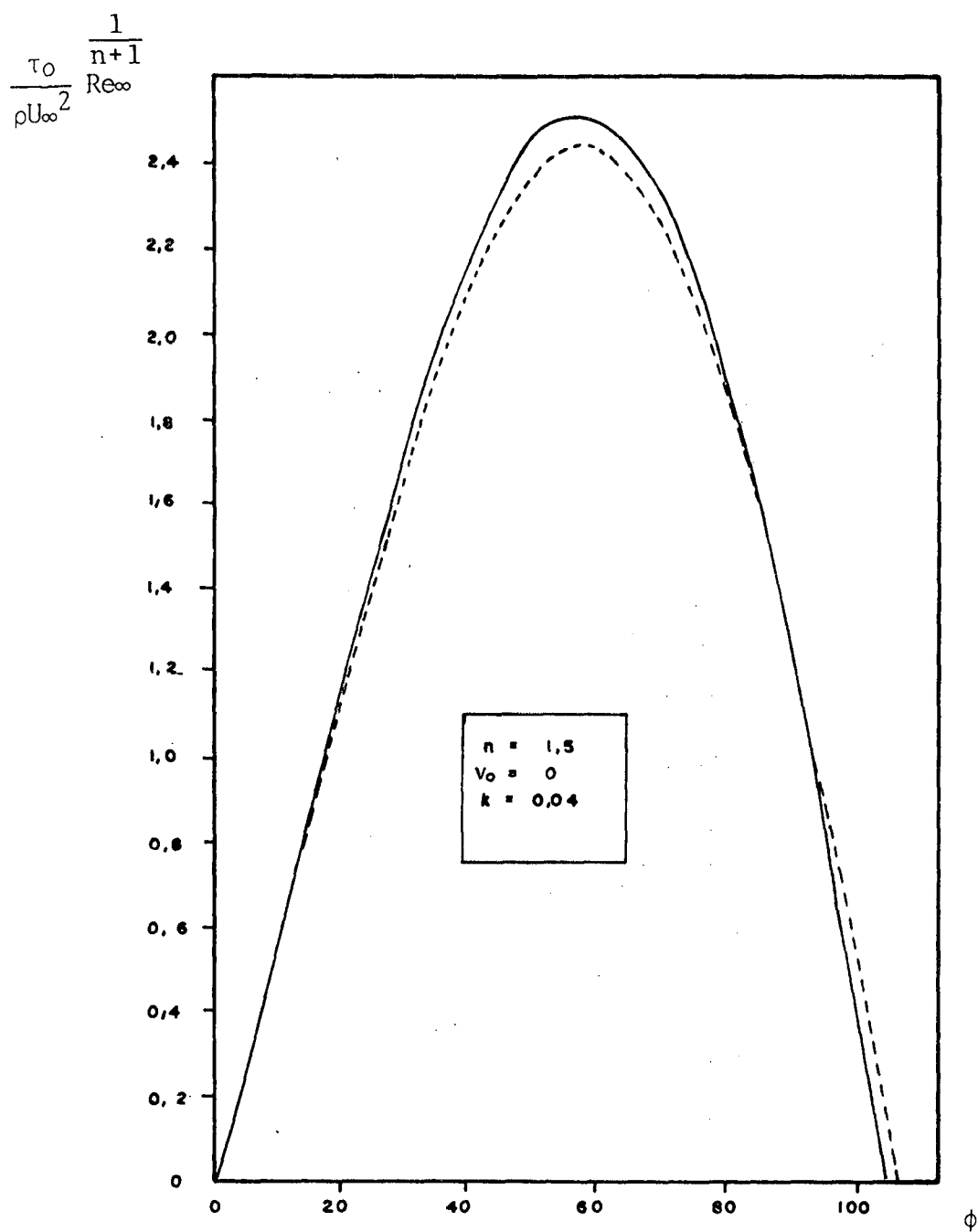


Fig. 4.12 - Coeficiente de arraste com deslizamento na interface.

Em sua tese de Mestrado NEVES [4] mostra que a variação dos valores do coeficiente de arraste é inversamente proporcional a k isto é, se aumentar k (diminui atrito) os valores do coeficiente de arraste diminuem e vice-versa. Nesse trabalho usou-se apenas o valor $k = 0.04$ a guisa de exemplo NEVES [4] justificou a hipótese de que o valor de k é muito pequeno, pode ser admitido como constante e seu valor máximo está em torno de 4,6% da velocidade do escoamento externo. Teoricamente os valores deveriam ter os seguintes limites:

$k = 0$ escoamento em torno de corpos sólidos
 $k = 1$ escoamento ideal.

Devemos observar nas figuras 4.8 e 4.9 que com o aumento de k os valores do ângulo em que se dá a separação tendem a aumentar, pois aumentando-se a velocidade de deslizamento, o escoamento tende a se aproximar cada vez mais do escoamento potencial. Podemos verificar esse fato nas figuras acima citadas pela inversão das curvas na região próxima aos pontos de separação. Esses resultados estão qualitativamente de acordo com NEVES [4] e FIGUEIREDO [7].

4.1.3 - Análise das espessuras da camada limite

Elas são calculadas pelas seguintes fórmulas:

- Placa Plana:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} (1 - u) \, dy$$

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} u(1 - u) \cdot dy$$

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} u(1 - u^2) \, dy$$

- Cilindro:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} f(1-u) dy \quad \text{sem deslizamento}$$

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} f[1 - (1-k)u] dy \quad \text{com deslizamento}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} f u (1-u) dy \quad \text{sem deslizamento}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} f u [(1-k) - u] dy \quad \text{com deslizamento}$$

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} f u (1-u^2) dy \quad \text{sem deslizamento}$$

A espessura δ da camada limite é calculada como o valor de y para o qual $\frac{u}{U_{\infty}} = 0.99$.

Tabela 4.2 - Valores das espessuras da camada limite para a placa plana.

PRESENTE TRABALHO					
n	δ	δ_1	δ_2	δ_3	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$
0,2	7,10	1,37	0,63	1,04	2,185
0,5	6,16	1,77	0,72	1,15	2,458
1,0	5,20	1,70	0,65	1,02	2,620
1,5	4,00	1,50	0,55	0,85	2,730
2,0	3,28	1,34	0,48	0,74	2,780

BLASIUS $n = 1$				
δ	δ_1	δ_2	δ_3	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$
5,0	1,72	0,664	1,03	2,59

Os resultados aparecem para a placa plana na tabela 4.2 e para o cilindro a partir do gráfico 4.12. Na tabela são mostrados os valores de

$$\delta = \frac{\delta(x) \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{n+1}}}{x}, \quad \delta_1 = \frac{\delta_1(x) \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{n+1}}}{x},$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_2(x) \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{n+1}}}{x}, \quad \delta_3 = \frac{\delta_3(x) \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{n+1}}}{x},$$

bem como a relação ou fator de forma $\frac{\delta_1}{\delta_2}$.

Observa-se que os valores de δ_1 , δ_2 , δ_3 passam por um máximo nas proximidades de $n=0.5$; a espessura δ aumenta à medida que n decresce ("viscosidade" aumenta) e a relação $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ aumenta à medida que n também aumenta. Os valores de δ estão de acordo com BLASIUS e ACRIVOS [3]. Os valores de δ_1 , δ_2 , δ_3 , $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ para fluido Newtoniano, são comparados com os valores de BLASIUS.

- Cilindro: Para o caso de deslizamento na interface, a introdução de δ_1 e δ_2 é feita de maneira análoga a SCHLICHTING [19], integrando-se primeiramente a equação do movimento em relação a y , eliminando a componente v da velocidade com o auxílio da equação da continuidade, com a condição de que (NEVES [4]):

$$\begin{aligned} \text{para } y = 0 \quad u &= k U(x) \quad v \leq 0 \\ \text{para } y = \delta \quad u &= U(x) \end{aligned}$$

As espessuras δ_1 e δ_2 representam respectivamente a massa de fluido e a quantidade de movimento que deixam de passar numa espessura δ_1 e δ_2 , devido ao atrito.

Nas figuras 4.13, 4.14 e 4.15 estão os valores de δ_1 qualitativamente de acordo com NEVES [4] que conforme lembrou em sua tese de Mestrado, verifica-se que os resultados não estão de acordo com a definição clássica de δ_1 . A definição clássica é:

$$U(x) \delta_1 = \int_0^{\infty} f(U(x) - u) dy = \int_0^{\infty} f U(x) dy - \int_0^{\infty} f u dy$$

= massa de fluido relativa ao escoamento potencial. — massa de fluido relativa ao escoamento da camada limite. Com deslizamento temos:

$$U(x) \delta_1 = \int_0^{\infty} f U(x) dy + \int_0^{\infty} f k u dy - \int_0^{\infty} f u dy$$

O termo $\int_0^{\infty} f k u dy$ representa a massa de fluido que escoar devido ao deslizamento. Essa contribuição é nula quando $k = 0$ (superfície sólida); à medida que aumenta o valor de k , maior será

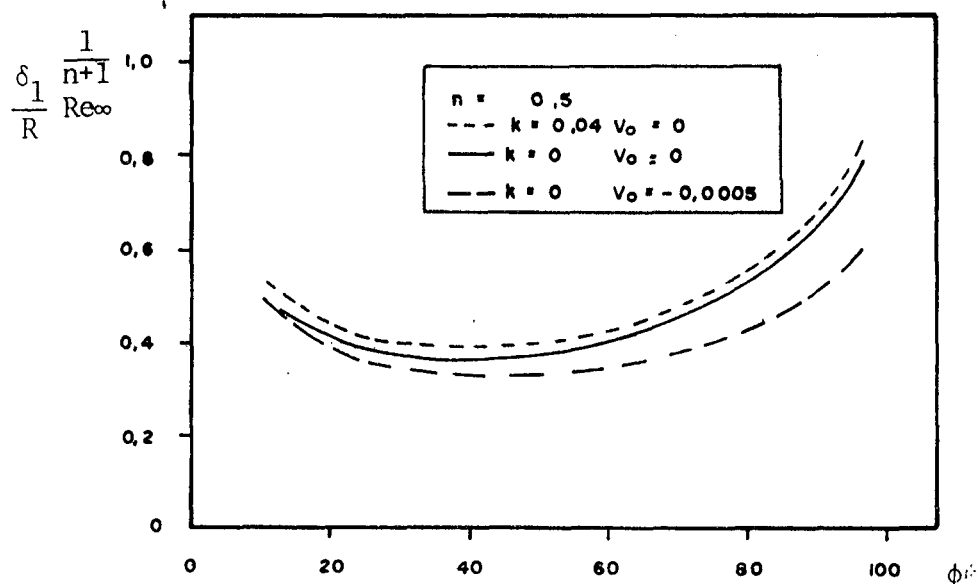


Fig. 4.13 - Espessura de deslocamento.

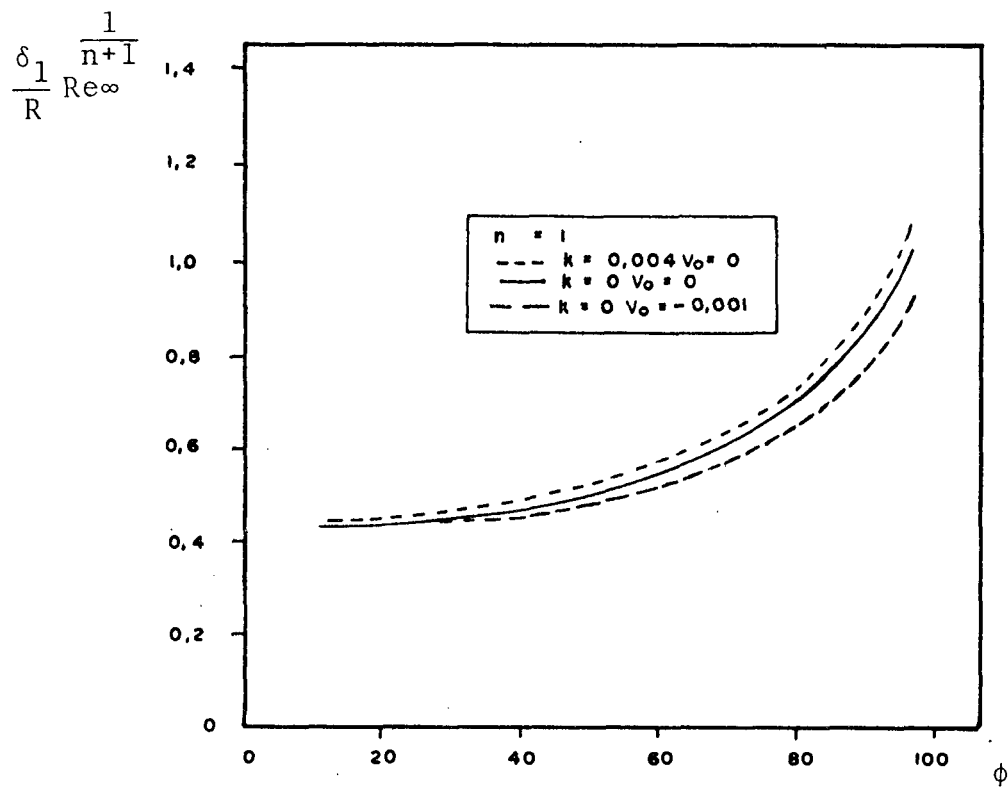


Fig. 4.14 - Espessura de deslocamento.

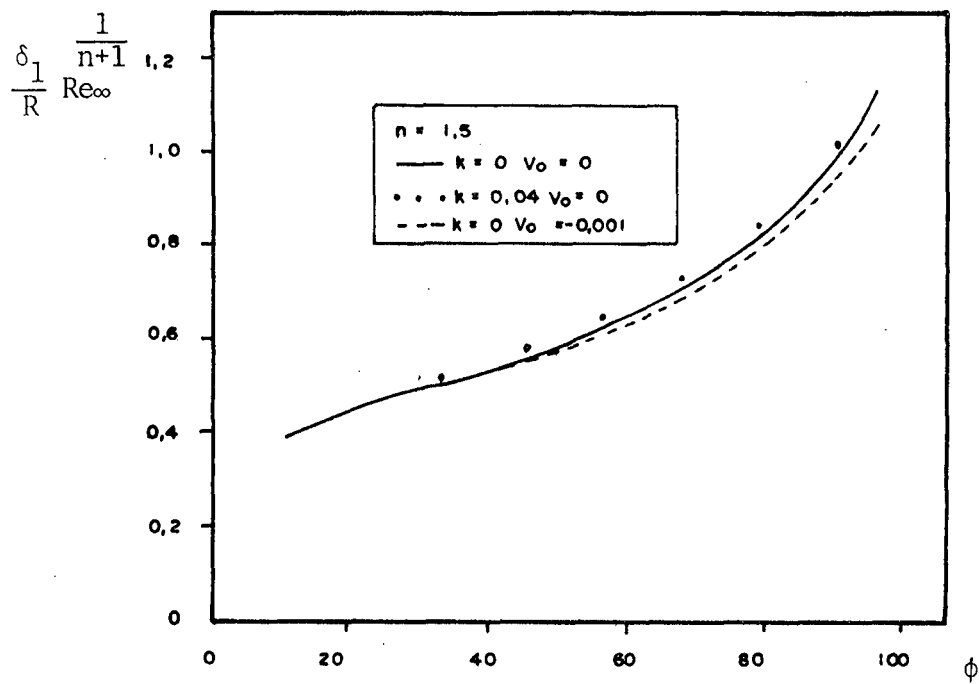


Fig. 4.15 - Espessura de deslocamento.

a contribuição do deslizamento fazendo com que os valores de δ_1 aumentem, até que para $k=1$ (escoamento ideal), $\delta_1 \rightarrow \infty$; seria daí a própria espessura do escoamento potencial. Para $k=0$ e $n=1$ os resultados estão de acordo com SCHLICHTING [19]. Para o caso de sucção na parede (e $k=0$), observa-se um decréscimo nos valores de δ_1 ; resultados que eram esperados. À medida que n cresce as influências da sucção e deslize vão diminuindo.

Nas figuras 4.16, 4.17 e 4.18, vê-se os valores de δ_2 .

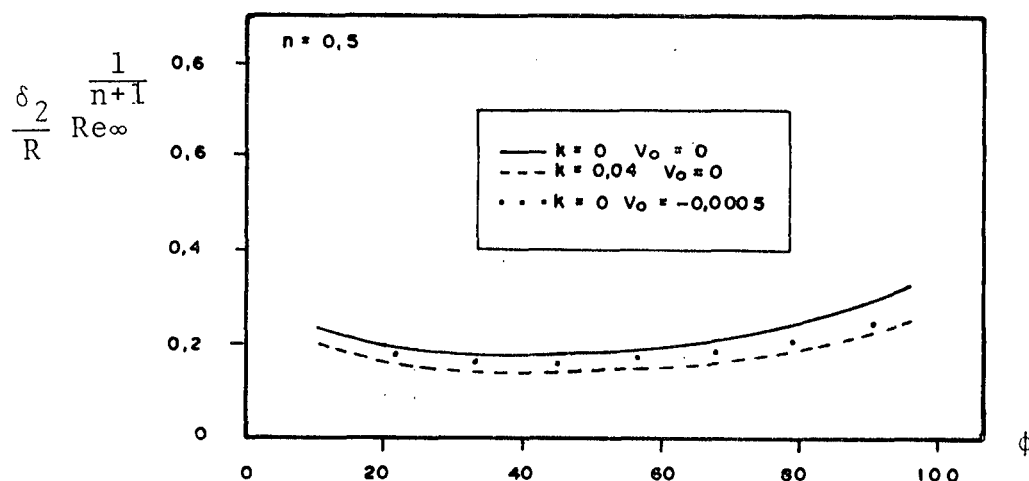


Fig. 4.16 - Espessura da perda de quantidade de movimento.

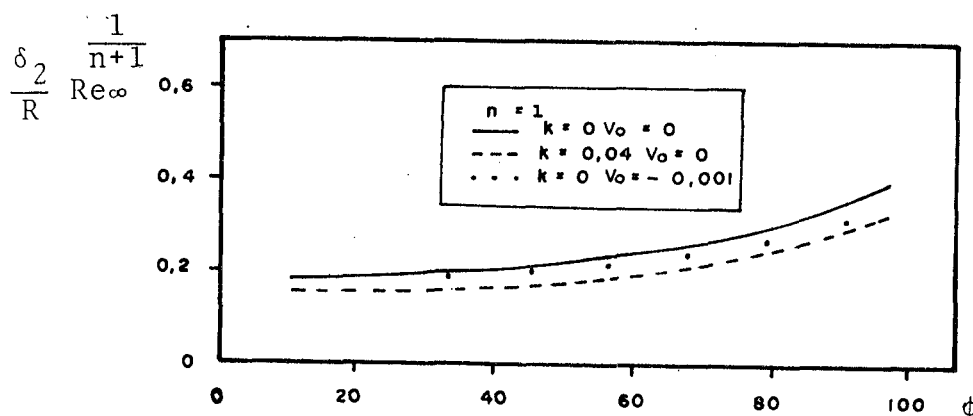


Fig. 4.17 - Espessura da perda de quantidade de movimento.

Vemos que aumentando-se o valor de k os valores de δ_2 diminuem. Fisicamente esses resultados são os esperados pois um aumento de k , corresponde a um aumento da quantidade de movimento dentro da camada limite. Um fato importante é que para fluidos não-

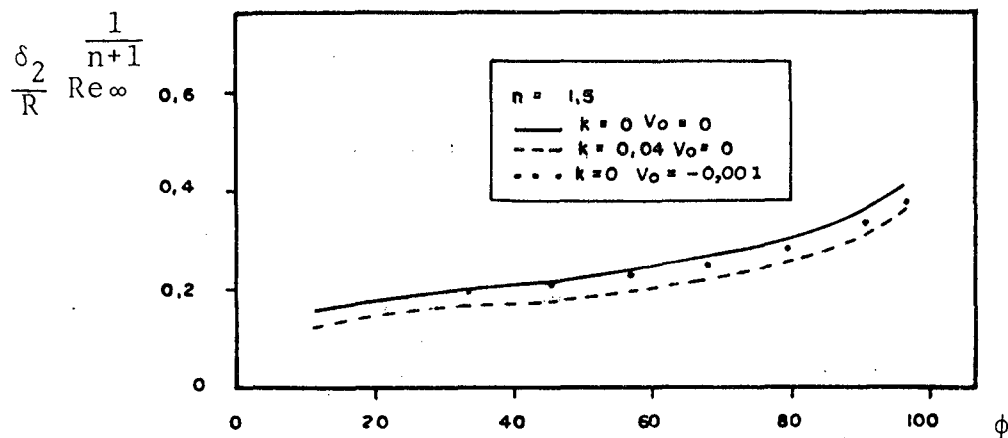


Fig. 4.18 - Espessura da perda de quantidade de movimento.

newtonianos ($n < 1$) os valores de δ_2 são maiores perto do ponto de estagnação, diminuem de valor, passam por um mínimo e depois crescem como no caso dos fluidos newtonianos. Uma possível explicação pode ser dada lembrando que o modelo "power law" para valores baixos da taxa de cisalhamento falha na representação das características dos fluidos não-newtonianos. Os valores da taxa de deformação são muito pequenos perto do ponto de estagnação e se analisarmos a viscosidade aparente (conforme discutido no capítulo II), os valores da mesma tornam-se bastante grande. Daí para valores de x pequenos a espessura δ_2 sofre uma grande influência desses altos valores da viscosidade e apresenta valores maiores, decresce com o aumento da taxa de deformação e para valores moderados da mesma, a viscosidade aparente varia pouco, havendo uma influência mais acentuada do valor de x na espessura da camada limite, fazendo com que δ_2 cresça com o aumento da distância x . Para os fluidos dilatantes $n < 1$ a viscosidade aparente perto do ponto de estagnação é pequena e assim observa-se na figura 4.18, sempre crescimento da espessura de momento. O mesmo fato é verificado para a espessura de deslocamento. Para o caso de sucção, verifica-se um decréscimo nos valores de δ_2 .

Nas figuras 4.19 e 4.20 temos os valores das espessuras de deslocamento e da perda de quantidade de movimento para $n = 0.2$ e $n = 2$, respectivamente, onde pode-se observar um efeito mais acentuado no fato comentado acima. Para efeito de comparação de resultados, apresenta-se na figura 4.21, os valores da relação $\frac{\delta_3}{\delta_2}$, espessura da perda de energia sobre espessura da perda de δ_2 quantidade de movimento, para diversos índices de comportamento do escoamento; resultados esses qualitativamente em acordo com FIGUEIREDO [7] para $n = 1$ e $n = 1.2$.

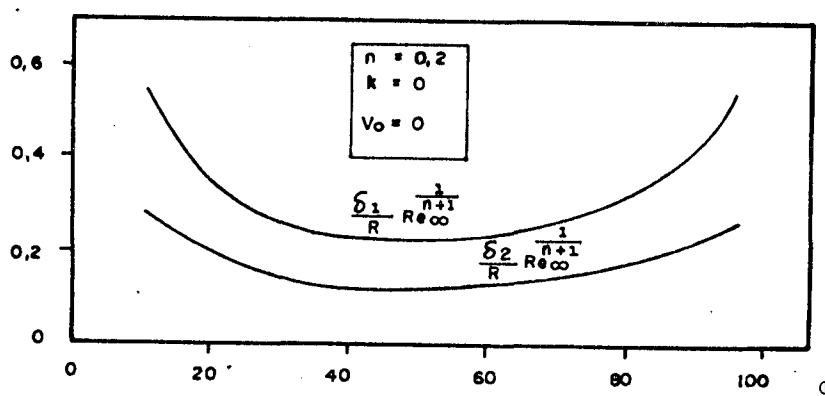


Fig. 4.19 - Espessura de deslocamento e da perda de quantidade de movimento.

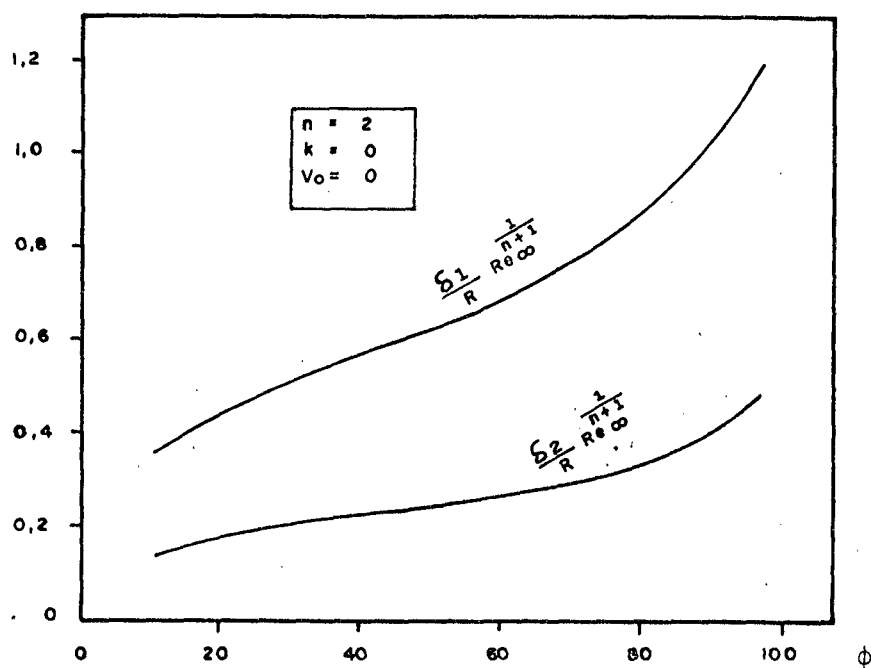


Fig. 4.20 - Espessura de deslocamento e da perda de quantidade de movimento.

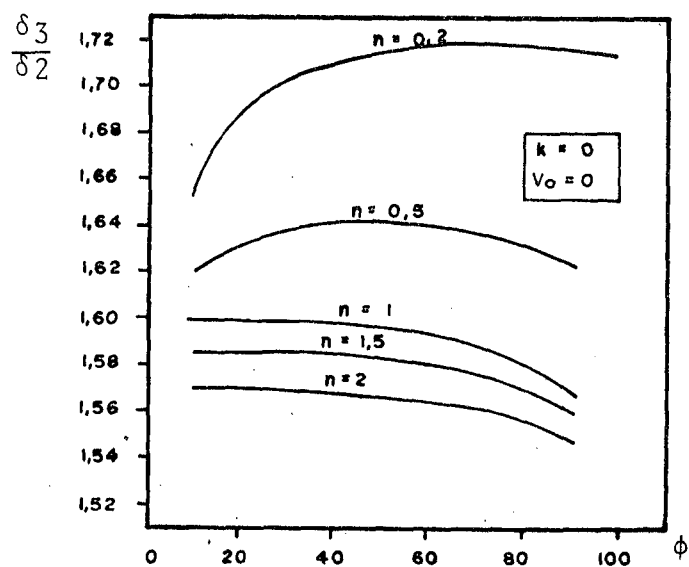


Fig. 4.21 - Relações entre as espessuras da perda de energia e as de quantidade de movimento para diversos tipos de fluidos.

4.2 - Análise Final

4.2.1 - Dados iniciais

O maior problema que apresenta o método do presente trabalho é o conhecimento do perfil inicial de velocidade $u(1,j)$ e da espessura $\delta(1)$ da camada limite, para os diversos tipos de fluidos.

A não utilização de um perfil de velocidade adequado, levou o programa a consumir um tempo excessivo para o mesmo número de estações e os valores obtidos não eram precisos. O número de pontos iniciais na vertical N_p depende desse perfil. Para a placa plana usou-se um polinômio do sexto grau para todos os tipos de fluidos:

$$u(1,j) = 2\left(\frac{Y}{\delta}\right) - 5\left(\frac{Y}{\delta}\right)^4 + 6\left(\frac{Y}{\delta}\right)^5 - 2\left(\frac{Y}{\delta}\right)^6$$

Para a fonte plana de escoamento, utilizou-se um polinômio do terceiro grau do tipo:

$$u(1,j) = \frac{3}{2}\left(\frac{Y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\delta}\right)^3$$

Para o caso do cilindro usou-se dois perfis senoidais:

$$u(1,j) = \sin(1,531 \frac{Y}{\delta} + 0,04) \quad \text{com deslizamento}$$

$$u(1,j) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{Y}{\delta}\right) \quad \text{sem deslizamento}$$

A espessura inicial da camada limite foi o fator mais importante e vital para o perfeito andamento do programa. Os seus valores precisam ser muito próximos dos valores corretos, pois são fatores determinantes para a geração do número de pontos N_p iniciais na vertical e para a adaptação do perfil inicial de velocidade na grade. Não sendo essa espessura aproximadamente correta, todos os resultados nas estações posteriores estarão fora da realidade. A falta de valores corretos para $\delta(1)$ é uma das causas primordiais para alguns resultados não tão satisfatórios.

No presente trabalho achou-se uma expressão analítica para $\delta(1)$ em função do índice de comportamento n , usando-se a expressão integral da quantidade de movimento de Von Kármán:

$$\frac{\tau_o}{\rho} = \frac{d}{dx} U_\infty \int_0^\delta (U_\infty - u) dy + \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy$$

onde τ_o é a tensão na parede, sendo tomada do modelo "power law" e u deve ser o perfil inicial de velocidade adotado. Desenvolvendo essa expressão e após certas considerações obtém-se para δ :

- Placa plana:

$$\delta(1) \equiv \frac{2^{\frac{n}{n+1}} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{9009}{985}\right)^{\frac{1}{n+1}} x}{Re_x^{1/n+1}}$$

- Fonte plana:

$$\delta(1) \equiv \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{280}{39}\right)^{\frac{1}{n+1}} x}{\left(1 - \frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{n+1}} Re_x^{1/n+1}}$$

- Cilindro;

$$\delta_{(1)} \cong \left(\frac{\frac{6}{10} \cotg \left(\frac{x}{R} \right) x}{\left(\frac{3}{2} \right)^n R} + \frac{\frac{3}{10}}{\left(\frac{3}{2} \right)^n} \right)^{\frac{-1}{n+1}} \times Re_{\infty}^{\frac{-1}{n+1}} \quad (\text{com deslizamento } k = 0,04)$$

$$\delta_{(1)} \cong \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{x}{Re_{\infty}^{\frac{1}{n+1}}} \left[\frac{14}{100} + \frac{28}{100} \cotg \left(\frac{x}{R} \right) \frac{x}{R} \right]^{\frac{-1}{n+1}} \quad (\text{sem deslizamento})$$

A determinação do coeficiente de arraste é função do escoamento na interface. Quanto mais próximo dela estiverem os primeiros pontos, mais real deverá ser os resultados; porém quanto menor forem os intervalos iniciais, maior será a quantidade de pontos na direção normal ao escoamento. Assim existe um número ideal de pontos na vertical que além da precisão, fornece uma malha econômica em tempo de máquina.

Para todos os casos da placa plana e da fonte plana, usou-se os valores: $\Delta\eta(1) = 0.012$ e $BK = 1.01$, obtendo-se:

- Placa plana:

$n = 0.2$	148 pontos
$n = 0.5$	146 pontos
$n = 1$	142 pontos
$n = 1.5$	128 pontos
$n = 2$	117 pontos

- Fonte plana:

$n = 0.5$	116 pontos
$n = 1$	109 pontos
$n = 2$	99 pontos

- Cilindro;

Para todos os casos usou-se os valores: $\Delta\eta(1) = 0,025$ e $BK = 1,03$, obtendo-se:

$n = 0.2$ 79 pontos

$n = 0.5$ 53 pontos

$n = 1$ 40 pontos

$n = 1.5$ 36 pontos

$n = 2$ 34 pontos

O número de pontos na direção ξ influi na precisão dos resultados. Diminuindo $\Delta\xi$ aumenta-se o número de pontos e melhora a precisão porém, aumenta o tempo global de computação e vice-versa. Esse fato permite a determinação de um intervalo ótimo dentro da precisão estabelecida. O caso do cilindro foi o que apresentou o maior tempo de computação por estação; aproximadamente 0,98 seg em média (esse tempo é também função de n), num total médio de aproximadamente 1100 estações. Inicialmente $\Delta\xi$ em termos físicos fez-se da ordem de 10^{-3} graus em 1000 estações, dando no final um avanço de 1° para que se garantisse no início um perfil de velocidade já aproximadamente estável.

4.2.2 - Conclusões

Os resultados encontrados para os três casos quando comparados com ACRIVOS [3], SCHLICHTING [19], BLASIUS, FIGUEIREDO [7] e NEVES [4] são tidos como bons, porém sempre será possível alguns refinamentos, como por exemplo:

1. Na própria espessura inicial da camada como também do perfil inicial de velocidade.

2. No valor de N que no caso foi mantido constante e igual a $\frac{1}{n+1}$. É possível encontrar-se o melhor valor para cada situação ou se necessário obter-se uma função $N(x)$.

3. No critério usado para se testar o número de pontos na vertical N_p devido ao crescimento da camada limite. Esta é uma questão de vital importância; uma alta frequência de testes vem a prejudicar os resultados e talvez a convergência já que esses testes são feitos a partir de determinados número de iterações e estações. Provavelmente para cada tipo de fluido de veríamos usar um critério diferente já que o crescimento da camada é função do índice de comportamento do escoamento (n). Nesse trabalho foi mantido o mesmo critério para todos os fluidos. Outro fato interessante é que para os casos de sucção na interface devemos testar menos frequentemente o número de pontos N_p na vertical já que o crescimento da camada limite é mais suave.

4. Na discretização das equações. As não linearidades existentes foram sempre consideradas conhecidas (da estação anteriormente calculada). É possível obter-se melhores resultados quando este artifício for evitado.

Além do que foi falado acima, algumas sugestões para futuros trabalhos, seriam:

1. Seria interessante uma melhor definição para as novas coordenadas ξ e η para que permitissem o estudo para índices de comportamento do escoamento extremamente pequenos inclusive nulo no qual a tensão é uma constante dentro da camada limite.

2. Introduzir a transferência de calor com a inclusão de mais uma equação que seria desacoplada das demais.

3. Introduzir o transporte de massa.

4. Fazer o mesmo estudo para interfaces esféricas ou ainda estudo de escoamento em torno de gotas.

5. Resolução do mesmo problema usando algum outro modelo que contornasse alguns problemas do "power law".

BIBLIOGRAFIA

- |1| - GORDON, R.J., "Non-Newtonian Fluids", I & EC Annual Reviews, Washington, OC, pp. 192-201, 1974.
- |2| - HUGHES, W.F. e BRIGHTON, J.A., "Fluid Dinamics", Schaum Publishing Co., 1967.
- |3| - ACRIVOS, A., SHAH, M.J. e PETERSEN, E.E., "Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows^w of non-newtonian fluids past external surfaces", AIChE J., 6, 312, 1960.
- |4| - NEVES, F.S., "Efeitos viscosos em cilindros imersos em fluidos não-newtonianos", Tese de M.Sc. COPPE, 1972.
- |5| - ASTARITA, G. e APUZZO, G., "Motion of gas bubbles in non-newtonian liquids", AIChE J., 11, 815, 1965.
- |6| - BIZZEL, G.D. e SLATTERY, J.C., "Non-Newtonian Boundary Layer Flow", Chem. Eng. Sci., 17, 777, 1962.
- |7| - FIGUEIREDO, A. Mac Dowel e Schmal M., "The Effect of Suction and Slip Velocity of a Non-Newtonian Fluid Flowing over a Circular Cylinder", COPPE/UFRJ, Int. J. Heat and Mass Transfer, 21, 175, 1978.
- |8| - LAWRENCE E. MALVERN, "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- |9| - FLÜGGE, S., "The non-linear field theories of mechanics" Springer - Verlag, 1965.
- |10| - ASTARITA, G., "Is Non-Newtonian Fluid Mechanics a Culturally Autonomous Subject?", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1, 203, 1976.

- [11] - GOVIER/AZIZ, "The flow of complex mixtures in pipes", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- [12] - METZNER, A.B., "Non-Newtonian Technology", (pp. 74 - 147), In: T.B. Brew and L.W. Hoopes, Tr. (eds) "Advances in Chemical Eng.", Vol. 1, Academic Press, New York, 1956.
- [13] - BIRD, R.B., STEWART, W.E. e LIGHTFOOT, E.N., "Transport phenomena", Wiley, New York, 1960.
- [14] - FLÜGGE, W., "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Springer-Verlag, 1962.
- [15] - ASTIN, J., JONES, R.S. e LOCKYER, P., "Boundary layers in non-newtonian fluids", Journal de Mecanique, 12, 527, Setembro, 1973.
- [16] - THOMSON e MILNE, L.M., "Theoretical Hydrodynamics", 5^a ed.
- [17] - SCHOWALTER, W.R., "The application of Boundary - Layer Theory to Power-Law Pseudoplastic Fluids: Similar Solutions", AIChE Journal, 6,24, 1960.
- [18] - PEREIRA FILHO, H.V., "A Four Equation Model for Numerical Solution of the Turbulent Boundary Layer", Dissertação de Doutorado pela Universidade de Houston, Maio 1964.
- [19] - SCHLICHTING, H. "Boundary Layer Theory", 6^a ed. McGraw-Hill.
- [20] - SMITH, G.D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations", 1971.
- [21] - CARNAHAN, B., LUTHER, H.A., WILKES, J.O., "Applied Numerical Methods", Wiley, 1969.

- |22| - AMES, W.F., Numerical Methods for Partial Differencial Equations, 2.^a ed., New York, Academic Press, 1977.

APÊNDICE 1

1. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

Sejam as equações do movimento em coordenadas ortogonais curvilíneas dadas a duas dimensões por:

$$\rho f u \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \right] + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -f \frac{\partial P''}{\partial x} + f^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f^2} \right) + \frac{f \partial P'_{11}}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \rho f u \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R} \right] + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = & - \frac{\partial P''}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{22}}{f} \right) - \frac{f P'_{11}}{R} + \\ & + f \frac{\partial P'_{12}}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Uma análise da ordem de grandeza dos termos que aparecem nas equações acima, irá mostrar, que alguns deles podem ser desprezados. O conhecimento físico do caráter da camada limite, estabelece que a ordem de grandeza da variável vertical é a mesma da espessura da camada limite, ou seja $O(y) \sim O(\delta)$ e que a ordem de grandeza da variável x é a mesma de uma das grandezas que definem o tamanho da superfície ou seja, $O(x) \sim O(L)$ onde L é uma medida característica da superfície. A equação da conservação da massa estabelece que,

$$\frac{O(u)}{O(v)} = \frac{O(L)}{O(\delta)} \quad (1.3)$$

O conceito de camada limite, introduzido por Prandtl diz que existe uma região adjacente à parede, de pequena espessura, onde ocorrem grandes variações dos parâmetros do escoamento.

Isto significa que $O(\delta) \ll O(L)$, ou seja, a espessura da cama da limite é realmente muito menor do que as dimensões caracte-
rísticas da superfície. Uma análise da ordem de magnitude dos
termos que aparecem nas equações (1.1) e (1.2) fornecerá, para
a equação na direção x

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u v}{R} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{f^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f^2} \right) + \frac{f}{\rho} \frac{\partial P'_{11}}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\frac{O(u)^2}{O(L)} \cdot \frac{O(u^2)}{O(L)} \cdot \frac{O(\delta)}{O(L)} \cdot \frac{O(u^2)}{O(L)} = \frac{O(\Delta P'')}{O(\rho) O(L)} \cdot \frac{O(P'_{12})}{O(\rho) O(\delta)} \cdot \frac{O(P'_{11})}{O(\rho) O(L)}$$

De uma forma geral as dimensões da tensão é dada por
velocidade, viscosidade e comprimento; portanto pode-se supor
que

$$O(P'_{11}) \sim \frac{O(u)}{O(L)} O(\mu) \quad (1.5)$$

$$O(P'_{12}) \sim \frac{O(u)}{O(\delta)} O(\mu) \quad (1.6)$$

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u v}{R} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{f^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f^2} \right) + \frac{f}{\rho} \frac{\partial P'_{11}}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\frac{O(u^2)}{O(L)} \cdot \frac{O(u^2)}{O(L)} \cdot \frac{O(\delta)}{O(L)} \cdot \frac{O(u^2)}{O(L)} = \frac{O(\Delta P'')}{O(\rho) O(L)} \cdot \frac{O(u) O(\mu)}{O(\rho) O(\delta^2)} \cdot \frac{O(u) O(\mu)}{O(\rho) O(L^2)}$$

multiplicando a equação (1.7) por $\frac{O(L)}{O(u^2)}$ e dividindo e multi-
plicando o segundo termo do segundo membro por L, tem-se na di-
reção x:

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u v}{R} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{f^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f^2} \right) + \frac{f}{\rho} \frac{\partial P'_{11}}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$O(1) O(\delta) O(1) = \frac{O(\Delta P'')}{O(\rho) O(u^2)} \cdot \frac{O(\mu)}{O(\rho) O(u) O(L)} \cdot O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{O(\mu)}{O(\rho) O(L) O(u)}$$

Como dimensionalmente pode verificar-se $\frac{O(\mu)}{O(\rho) O(u) O(L)}$ tem as dimensões de um número de Reynolds (Re). Extendendo-se para o caso de fluidos não-newtonianos fez-se:

$$\frac{O(K)}{O(\rho) O(u^{2-n}) O(L^n)} \sim \frac{O(\mu)}{O(\rho) O(u) O(L)}$$

Assim tem-se:

$$f u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u v}{R} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{f^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f^2} \right) + \frac{f}{\rho} \frac{\partial P'_{11}}{\partial x} \quad (1.9)$$

$$O(1) \quad O(\delta) \quad O(1) = \frac{O(\Delta P'')}{O(\rho) O(u^2)} \quad O\left(\frac{1}{Re}\right) \quad O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \quad O\left(\frac{1}{Re}\right)$$

$$O(\delta) \ll 1$$

$$O\left(\frac{1}{Re}\right) \ll 1$$

$$O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \gg 1$$

$$O\left(\frac{1}{Re}\right) O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1$$

Assim desprezando-se os termos com ordem $\ll 1$ em presença dos demais temos para a direção x a equação em termos reais:

$$\rho f u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{\partial P'_{12}}{\partial y} + \frac{2f}{R} P'_{12} \quad (1.10)$$

Procedimento análogo é executado na equação do movimento na direção y:

$$\begin{aligned}
 f u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{f u^2}{R} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & - \frac{\partial P''}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial p'_{12}}{\partial x} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'_{22}}{f} \right) - \\
 & - \frac{f}{\rho} \frac{p'_{11}}{R}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
 f u \frac{\partial v}{\partial x} & \longrightarrow \frac{O(u^2) \cdot O(\delta)}{O(L^2)} \\
 \frac{f u^2}{R} & \longrightarrow \frac{O(u^2)}{O(L)} \\
 v \frac{\partial v}{\partial y} & \longrightarrow \frac{O(u^2) \cdot O(\delta)}{O(L^2)} \\
 \frac{\partial P''}{\partial y} \frac{1}{\rho} & \longrightarrow \frac{O(\Delta P'')}{O(\delta) \cdot O(\rho)} \\
 \frac{f}{\rho} \frac{\partial p'_{12}}{\partial x} & \longrightarrow \frac{O(\mu) \cdot O(u)}{O(\rho) \cdot O(L) \cdot O(\delta)} \\
 \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'_{22}}{f} \right) & \longrightarrow \frac{O(v) \cdot O(\mu)}{O(\rho) \cdot O(\delta^2)} \\
 \frac{f}{\rho} \frac{p'_{11}}{R} & \longrightarrow \frac{O(u) \cdot O(\mu)}{O(L^2) \cdot O(\rho)}
 \end{aligned}$$

multiplicando (1.11) por $\frac{O(L^2)}{O(u^2) \cdot O(\delta)}$ temos:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = O(1) \tag{1.12}$$

$$\frac{u^2}{R} = \frac{O(u^2)}{O(L)} \frac{O(L^2)}{O(u^2) \cdot O(\delta)} \tag{1.13}$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = O(1) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial P''}{\partial y} \frac{1}{\rho} = \frac{O(\Delta P'') \cdot O(L^2)}{O(\delta^2) \cdot O(\rho) \cdot O(u^2)} \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_{12}}{\partial x} = \frac{O(u) O(\mu) O(L^2)}{O(\rho) O(L) O(\delta^2) O(u^2)} \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{12}}{f} \right) = \frac{O(v) O(\mu) O(L^2)}{O(\rho) O(\delta^2) O(u^2) O(\delta)} \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{P'_{11}}{R} = \frac{O(u) O(\mu) O(L^2)}{O(L^2) O(\rho) O(u^2) O(\delta)} \quad (1.18)$$

eliminando v em (1.17), temos:

$$f u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{f u^2}{R} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P'''}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial P'_{12}}{\partial x} + \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'_{22}}{f} \right) - \frac{f}{\rho} \frac{P'_{11}}{R} \quad (1.19)$$

$$O(1) O\left(\frac{L}{\delta}\right) O(1) = \frac{O(\Delta P''')}{O(\rho) O(u^2)} O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 O\left(\frac{1}{Re}\right) O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 O\left(\frac{1}{Re}\right) O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 O\left(\frac{1}{Re_\delta}\right)$$

$$O\left(\frac{L}{\delta}\right) \gg 1$$

$$\frac{O(\Delta P''')}{O(\rho) O(u^2)} O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \gg 1$$

$$O\left(\frac{1}{Re}\right) O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim 1$$

$$\frac{O(\mu)}{O(\rho) O(u) O(\delta)} = O\left(\frac{1}{Re_\delta}\right) < 1$$

Assim desprezando-se os termos de ordem ≤ 1 temos a equação para y em termos reais:

$$\rho \frac{f u^2}{R} = \frac{\partial P''}{\partial y} \quad (1.20)$$

Para o caso de fluidos não-newtonianos estudados neste trabalho a tensão \underline{P}' é obtida de:

$$\underline{P}' = -\left\{ K \left| \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\Delta} : \underline{\Delta}} \right|^{n-1} \right\} \cdot \underline{\Delta} \quad (1.21)$$

onde $\underline{\Delta}$ é o tensor deformação. A componente P'_{12} em coordenadas ortogonais curvilíneas fica:

$$P'_{12} = -\left\{ K \left| \sqrt{\frac{1}{2} \left[2f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(f \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right)^2 \right]} \right|^{n-1} \right\} \cdot \left(f \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right) \quad (1.22)$$

Um estudo da ordem de magnitude dos termos indicará que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow O\left(\frac{u}{\delta}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow O\left(\frac{u}{L}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow O\left(\frac{u \cdot \delta}{L^2}\right) \quad (1.23)$$

$$\text{logo} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.24)$$

$$\text{ainda, } O\left(\frac{v}{R}\right) \sim O\left(\frac{u \cdot \delta}{R^2}\right), \quad O\left(\frac{u}{R}\right) \sim O\left(\frac{u}{R}\right) \quad (1.25)$$

$$\text{logo} \quad O\left(\frac{u}{R}\right) \gg O\left(\frac{v}{R}\right) \quad (1.26)$$

porém $O\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \leq \frac{u}{R}$ (ã medida que R cresce essa relação não mais se verifica). (1.26)

As conclusões de (1.23) a (1.26) levam finalmente a

$$P'_{12} = - \left\{ K \left| \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right)^2} \right|^{n-1} \right\} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right) \quad (1.27)$$

ou

$$P'_{12} = - \left\{ K \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right|^{n-1} \right\} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right) \quad (1.28)$$

Para os tipos de problemas estudados nesse trabalho, $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ e não está sendo ultrapassado o ponto de separação. Assim elimina-se o módulo e a expressão (1.28) fica:

$$P'_{12} = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{fu}{R} \right)^n \quad (1.29)$$

APÊNDICE 2

2. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

2.1 - Equação da Continuidade

Definindo-se as novas variáveis: $u = \frac{u_{\text{físico}}}{U(x)}$ e $v = \frac{v_{\text{físico}}}{U(x)}$ a equação da continuidade fica:

$$f \frac{\partial}{\partial x} (U(x) \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (U(x) \cdot v) + \frac{f U(x) \cdot v}{R} = 0$$

$$f u \frac{\partial U(x)}{\partial x} + f U(x) \frac{\partial u}{\partial x} + U(x) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f U(x) v}{R} = 0 \quad (2.0)$$

e com uma mudança de variáveis para ξ e η onde:

$$\xi = \int_0^X \frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{v_w^{\frac{1}{n}}} dx \quad \text{e} \quad \eta = \frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1} y}{(2\xi)^N v_w^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{d U(x)}{dx} = \frac{d U(x)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{v_w^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{(2\xi)^N v_w^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{d \xi} - \frac{N U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{\xi} \cdot \frac{\eta}{v_w^{\frac{1}{n}}} \quad (2.4)$$

e definindo

$$v = \frac{V}{(2\xi)^N} - \frac{v_w^{\frac{1}{n}} \cdot (2\xi)^N}{U(x)^{\frac{2}{n}-1}} \cdot f \cdot u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.5)$$

substitui-se (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) em (2.0) e após certo algebrismo tem-se a equação da continuidade na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & (2\xi)^{2N} f \frac{\partial u}{\partial \xi} + (2\xi)^{2N} f u \frac{1}{U(x)} \frac{d U(x)}{d \xi} \cdot \left(\frac{2n-2}{n}\right) + \\ & + \frac{\partial V}{\partial \eta} + (2\xi)^{2N} \frac{u f N}{\xi} + \frac{f V}{R_\eta} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$R_\eta = \frac{R(x) U(x)^{\frac{2}{n}-1}}{(2\xi)^N v_w^{\frac{1}{n}}}$$

2.2 - Equação do Movimento

Dada a equação:

$$\begin{aligned} f u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= f U(x) \frac{d U(x)}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f u^2}{R} dy + \\ &+ K n \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{f}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{R^2} f^2 \right) + \end{aligned}$$

$$+ 2K \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right)^n \frac{f}{R}$$

utiliza-se como no caso anterior as relações: (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) e

$$u = \frac{u_{\text{físico}}}{U(x)} ; \quad v = \frac{v_{\text{físico}}}{U(x)}$$

obtendo-se após algumas simplificações a equação do movimento em sua nova forma:

$$\begin{aligned} (2\xi)^{2N} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= (2\xi)^{2N} \frac{f}{U(x)} \frac{d U(x)}{d \xi} \{ 1 - u^2 + \\ &+ 2 \int_0^\eta \frac{f u^2}{R \eta} d\eta + \frac{f u^2 \eta (\frac{2}{n} - 1)}{R \eta} \} + \\ &+ (2\xi)^{2N} f \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R \eta} d\eta - \frac{f u^2 \eta N}{R \eta \xi} \right\} + \\ &+ \frac{n}{(2\xi)^{N(n-1)}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{R \eta} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{f}{R \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f^2 u}{R \eta^2} \right) + \\ &+ \frac{2}{(2\xi)^{N(n-1)}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{f u}{R \eta} \right)^n \frac{f}{R \eta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aparecem no segundo membro os termos devido a pressão, curvatura, sendo que os dois últimos representam a tensão viscosa.

APÊNDICE 3

3. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

3.1 - Equação da Continuidade

Por conveniência discretiza-se essa equação em torno do ponto $P_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}$. Parte-se da equação (2.6) do apêndice 2 e tem-se:

$$\begin{aligned}
 & (2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \\
 & + (2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{U(x)} \frac{dU(x)}{d\xi} \left(\frac{2n-2}{n} \right) \left|_{i+\frac{1}{2}} \right. + \\
 & + N(2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}}{\xi_{i+\frac{1}{2}}} + \\
 & + f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \frac{V_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} = 0 \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

onde: $\xi_{i+\frac{1}{2}} = \xi_{i+1} - 0.5 \Delta \xi$

$$R\eta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{R\eta_i + R\eta_{i+1}}{2} = \text{RETM}$$

$$\frac{1}{U(x)} \frac{dU(x)}{d\xi} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} = \text{TPRE} \quad (\text{termo de pressão})$$

$$(2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} = \left[\frac{2(\xi_i + \xi_{i+1})}{2} \right]^{2N} = (\xi_i + \xi_{i+1})^{2N} = \text{CSIM}$$

$$f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.25(f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}) = \text{EFEME}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1} - u_{i,j})/2 \Delta \xi = \text{DEUVXC}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{V_{i+\frac{1}{2},j} - V_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta \eta_{j-1}} = \frac{\text{VELM2} - \text{VELM1}}{\Delta \eta_{j-1}}$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (V_{i+\frac{1}{2},j} + V_{i+\frac{1}{2},j-1})/2 = (\text{VELM2} + \text{VELM1}) 0.5$$

$$u \bigg|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j} + u_{i,j-1})/4 = \text{UVEMC}$$

Com essas relações a equação (3.1) fica:

$$\text{VELM2} = \frac{\text{CON} - (\text{VELM1} \cdot \text{CF2})}{\text{CF1}} \quad (3.2)$$

onde temos:

$$\begin{aligned} \text{CON} = & -\Delta\eta_{j-1} \cdot \text{CSIM} \cdot \text{EFEME} \{ \text{DEUVXC} + \\ & + [\text{UVEMC} \cdot \text{TPRE} \cdot (\frac{2n-2}{2})] + (\frac{N \cdot \text{UVEMC}}{\xi_{i+1} - 0.5 \Delta\xi}) \} \end{aligned}$$

$$\text{CF1} = 1 + \frac{0.5 \text{ EFEME } \Delta\eta_{j-1}}{\text{RETM}}$$

$$\text{CF2} = \frac{0.5 \text{ EFEME } \Delta\eta_{j-1}}{\text{RETM}} - 1$$

3.2 - Equação do Movimento

Dada a equação (2.7) do apêndice 2, a discretização a gora é feita em torno do ponto $P_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$(2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} =$$

$$(2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2},j} \frac{1}{U(x)} \frac{dU(x)}{d\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \{ 1 - (u^2)_{i+\frac{1}{2},j} +$$

$$+ 2 \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} (u^2)_{i+\frac{1}{2},j} \eta_j (\frac{2}{n}-1)}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} \} +$$

$$+ (2\xi)_{i+\frac{1}{2}}^{2N} f_{i+\frac{1}{2},j} \{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i+\frac{1}{2},j} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} (u^2)_{i+\frac{1}{2},j} \eta_j^N}{R\eta_{i+\frac{1}{2}} \cdot \xi_{i+\frac{1}{2}}} \} + \\
& + \frac{n}{(2\xi)^{N(n-1)}} \Big|_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} \cdot u_{i+\frac{1}{2},j}}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n-1} \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{(f^2)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}}{(R\eta^2)_{i+\frac{1}{2}}} \right) + \\
& + \frac{2}{(2\xi)^{N(n-1)} \Big|_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} \right)^n \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}}{R\eta_{i+\frac{1}{2}}} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Os termos com integral são transformados em somatórios:

$$\int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \left\{ \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i,j} + \int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i+1,j} \right\} 0.5$$

$$\int_0^\eta \frac{f u^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i,j} = \sum_{p=2}^j \frac{\Delta \eta_p}{2R\eta_i} (f_{i,p} (u^2)_{i,p} + f_{i,p-1} (u^2)_{i,p-1})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = (F_{i+1,j} - F_{i,j}) / \Delta \xi$$

assim:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\eta} \frac{f u^2}{R \eta} d\eta \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta \xi} \left(\int_0^{\eta} \frac{f u^2}{R \eta} d\eta \Big|_{i+1,j} - \int_0^{\eta} \frac{f u^2}{R \eta} d\eta \Big|_{i,j} \right)$$

De acordo com as relações (3.10), (3.11) e (3.12) do capítulo 3 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \\ &- \frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} - u_{i+1,j-1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta \xi}$$

Introduzindo-se essas relações em (3.3) e separando para a esquerda os termos contendo $u_{i+1,j+1}$; $u_{i+1,j}$; $u_{i+1,j-1}$ e para a direita os termos contendo $u_{i,j+1}$; $u_{i,j}$; $u_{i,j-1}$ bem como os demais termos restantes chega-se à equação (3.13) do capítulo 3, que forma um sistema tridiagonal de equações lineares:

$$A_j u_{i+1,j+1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j-1} = D_j$$

onde os coeficientes ficam assim representados:

$$A_j = \frac{VELM(J)}{2 \cdot DELSUM} - \frac{TV1}{\Delta\eta_j \cdot DELSUM} + \frac{TV1 \cdot EFEM(J)}{2 \cdot RETM \cdot DELSUM}$$

$$B_j = \frac{CSIM \cdot EFEM(J) \cdot UVEM}{\Delta\xi} + \frac{TV1}{\Delta\eta_j \cdot DELSUM} + \frac{TV1}{\Delta\eta_{j-1} \cdot DELSUM}$$

$$C_j = \frac{-VELM(J)}{2 \cdot DELSUM} - \frac{TV1}{\Delta\eta_{j-1} \cdot DELSUM} - \frac{TV1 \cdot EFEM(J)}{2 \cdot RETM \cdot DELSUM}$$

e:

$$VELM(J) = V_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$DELSUM = (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})$$

$$EFEM(J) = f_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$RETM = R\eta_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$UVEM = 0.5(u_{i+1,j} + u_{i,j})$$

$$TV1 = \frac{n}{(2\xi)^{N(n-1)}} \bigg|_{i+\frac{1}{2}} \left(DEUYET - \frac{EFEM(J) \cdot UVEM}{RETM} \right)^{n-1}$$

onde

$$DEUYET = \frac{\partial u}{\partial \eta} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_j = \left(\frac{-VELM(J)}{2 \cdot DELSUM} + \frac{TV1}{\Delta\eta_j \cdot DELSUM} - \frac{TV1 \cdot EFEM(J)}{2 \cdot RETM \cdot DELSUM} \right) u_{i,j+1} +$$

$$+ \left(\frac{CSIM \cdot EFEM(J) \cdot UVEM}{\Delta\xi} - \frac{TV1}{\Delta\eta_j \cdot DELSUM} - \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{TV1}{\Delta\eta_{j-1} \text{ DELSUM}} \Bigg) u_{i,j} + \left(\frac{VELM(J)}{2 \text{ DELSUM}} + \frac{TV1}{\Delta\eta_{j-1} \text{ DELSUM}} + \right. \\
& \left. + \frac{TV1 \cdot EFEM(J)}{2 \text{ DELSUM} \cdot RETM} \right) u_{i,j-1} + \frac{TV1 \cdot UVEM \cdot \overline{EFEM(J)}^2}{\overline{RETM}^2} + \\
& + [CSIM \cdot EFEM(J) \cdot TPRES (1 - \overline{UVEM}^2 + SOMM + T1)] + \\
& + [CSIM \cdot EFEM(J) \cdot (DIF - T2)] + TV2
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
SOMM = & \frac{1}{2} \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R\eta_i} (f_{i,p}(u^2)_{i,p} + f_{i,p-1}(u^2)_{i,p-1}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R\eta_{i+1}} (f_{i+1,p}(u^2)_{i+1,p} + \\
& + f_{i+1,p-1}(u^2)_{i+1,p-1})
\end{aligned}$$

ou:

$$SOMM = \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2 \text{ RETM}} \left(EFEM(p) \overline{UVEM}^2 + \overline{UVEMJ}^2 \cdot EFEM(p-1) \right)$$

onde:

$$UVEMJ = 0.5(u_{i+1,p-1} + u_{i,p-1})$$

$$UVEM = 0.5(u_{i+1,p} + u_{i,p})$$

$$T1 = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}(u^2)_{i+\frac{1}{2},j} \eta_j (\frac{2}{n}-1)}{RETM}$$

$$T_2 = \frac{EFEM(J) \overline{UVEM}^2 \eta_j N}{RETM(\xi_{i+1} - 0,5 \Delta \xi)}$$

$$DIF = \frac{1}{\Delta \xi} \left[\sum_{p=2}^j \frac{\Delta \eta_p}{2 R \eta_{i+1}} (f_{i+1,p}(u^2)_{i+1,p} + f_{i+1,p-1}(u^2)_{i+1,p-1}) - \right. \\ \left. - \sum_{p=2}^j \frac{\Delta \eta_p}{2 R \eta_i} (f_{i,p}(u^2)_{i,p} + f_{i,p-1}(u^2)_{i,p-1}) \right]$$

$$TV_2 = \frac{2}{(2\xi)^{N(n-1)}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \left(DEUYET - \frac{EFEM(J) \cdot UVEM}{RETM} \right)^n \frac{EFEM(J)}{RETM}$$